Concours Blanc

Épreuve de mathématique

Durée : 4h

Proposition de corrigé

Exercice 1 : Équation différentielle

Dans cet exercice, on étudie les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad (E)$$

pour différentes expressions de la fonction réelle f.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E).

Remarque : On déroule la méthode du §2.2 du chapitre 6.

L'équation caractéristique de (E) est :

$$r^2 - 2r + 5 = 0.$$

Or
$$r^2 - 2r + 5 = (r-1)^2 - (2\mathrm{i})^2 = (r - 1 - 2\mathrm{i})(r - 1 + 2\mathrm{i})$$
donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguée :

$$r_1 = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Les solutions réelles de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = \mathrm{e}^x(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$, C_1 et C_2 étant deux constantes réelles arbitraires.

2. On suppose dans cette question que f est la fonction constante égale à 1.
Déterminer une solution particulière φ_1 de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \qquad (E_1)$$

Remarque : cf. §2.3 du chapitre 6, théorème 13

Le nombre -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique de (E_1) *(qui est la même que celle de (E))*, donc (E_1) possède une solution de la forme $\varphi_1 : x \mapsto B\mathrm{e}^{-x}$.
La constante réelle B doit vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad B\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{-x} + 5B\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

soit : $\qquad 8B = 1.$
On en déduit :

$$\varphi_1 : x \mapsto \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}.$$

3. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = x + 2$.
Montrer que la fonction $\varphi_2 : x \mapsto \dfrac{1}{16}(2x+5)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_2)$$

Pour tout réel x on a :

$$\varphi_2'(x) = \frac{1}{16}(-2x-3)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2''(x) = \frac{1}{16}(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

Calculons pour tout réel x :

$$\varphi_2''(x) - 2\varphi_2'(x) + 5\varphi_2(x) = \frac{1}{16}\left(2x + 1 + 4x + 6 + 10x + 25\right)\mathrm{e}^{-x} = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

La fonction φ_2 est donc bien une solution particulière de l'équation (E_2).

<u>Remarque</u> : Si cette solution particulière n'avait pas été proposée, on aurait pu deviner qu'une fonction du type : $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ était solution.

4. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = \sin(x)$.

a. Déterminer une solution particulière complexe $\varphi_{\mathbb{C}}$ de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-1)} \qquad (E_{\mathbb{C}})$$

<u>Remarque</u> : cf. §2.3 du chapitre 6, théorème 13

Le nombre $\mathrm{i}-1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique de $(E_{\mathbb{C}})$, donc $(E_{\mathbb{C}})$ possède une solution de la forme $\varphi_1 : x \mapsto Z\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x}$.
La constante complexe Z doit vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (\mathrm{i}-1)^2 Z\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x} - 2(\mathrm{i}-1)Z\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x} + 5Z\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x} = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x}$$

soit : $\qquad (-2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2 + 5)Z = 1, \quad$ donc $Z = \dfrac{1}{7-4\mathrm{i}} = \dfrac{7+4\mathrm{i}}{65}$.
On en déduit :

$$\varphi_{\mathbb{C}} : x \mapsto \frac{7+4\mathrm{i}}{65}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x}.$$

b. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire $Z_1 = (a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sous forme algébrique.

$$Z_1 = (a+\mathrm{i}b)(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) = a\cos(x) - b\sin(x) + \mathrm{i}(a\sin(x) + b\cos(x))$$

c. En déduire l'écriture algébrique de $Z_2 = (a + \mathrm{i}b)\,\mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-1)}$.
On a : $\quad \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \times \mathrm{e}^{-x}, \quad$ d'où :

$$Z_2 = \mathrm{e}^{-x}(a\cos(x) - b\sin(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-x}(a\sin(x) + b\cos(x))$$

d. Déduire des questions ci-dessus une solution particulière réelle φ_3 de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = \sin(x)\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_3)$$

On observe que $\sin(x)\mathrm{e}^{-x}$ est la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)x}$. Dès lors, une solution particulière de l'équation (E_3) est la partie imaginaire de $\varphi_{\mathbb{C}}$. D'après le résultat de la question **c.** on a :

$$\mathrm{Im}(\varphi_{\mathbb{C}}(x)) = \mathrm{Im}(Z_2) \qquad \text{avec } a = \frac{7}{65} \text{ et } b = \frac{4}{65}$$

On en déduit :

$$\varphi_3 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{65}(7\sin(x) + 4\cos(x))$$

5. On suppose dans cette question que pour tout réel x, $f(x) = 16x + 29 + 4\sin(x)$.
A l'aide des questions précédentes, déduire en fonction de φ_1, φ_2 et φ_3, les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = (16x + 29 + 4\sin(x))\mathrm{e}^{-x} \qquad (E_4)$$

On rédigera soigneusement la réponse, et on ne se lancera pas dans de longs calculs.

On a : $\quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad (16x + 29 + 4\sin(x))\mathrm{e}^{-x} = 16(x+2)\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} + 4\sin(x)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc d'après le principe de superposition *(théorème 14 du §2.3 du chapitre 6)*, la fonction $16\varphi_2 - 3\varphi_1 + 4\varphi_3$ est une solution particulière de (E_4).

On en déduit que les solutions de l'équation (E_4) sont les fonctions $y = h + 16\varphi_2 - 3\varphi_1 + 4\varphi_3$, à savoir les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + (2x+5)\mathrm{e}^{-x} - 3 \times \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x} + 4 \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{65}(7\sin(x) + 4\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + \mathrm{e}^{-x}\left(2x + \frac{37}{8} + \frac{28}{65}\sin(x) + \frac{16}{65}\cos(x)\right) \end{aligned}$$

C_1 et C_2 étant deux constantes réelles arbitraires.

Exercice 2 : Fonction et suite récurrente

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1. Régularité de f au voisinage de 0

a. Rappeler les développements limités en 0 de la fonction sh à l'ordre 4, et de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 1.

On a : $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ et $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$.

b. En déduire que si f admet un développement limité d'ordre 3 en 0, alors celui-ci est

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3).$$

Si f admet un développement limité en 0, alors il doit être :

$$\frac{x}{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)$$

c. Justifier que f admet bien ce développement limité en 0.
En déduire que f est continue et dérivable en 0.

Ce développement impose que l'image de 0 est : $1 - \dfrac{1}{6}0^2 + o(0) = 1$.
Or $f(0) = 1$, donc on a donc bien :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3).$$

La fonction f admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0, ce qui implique qu'elle est continue et dérivable en ce point. *(cf. Chapitre 15 §2.1 Corollaire 7 : Régularité d'une fonction admettant un développement limité).*

d. Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, et préciser en justifiant les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de T au voisinage de 0.

Les termes de degré 0 et 1 du développement limité donnent : $T : y = 1$.
Le terme de degré 2 est strictement négatif pour $x \neq 0$, donc le graphe $\mathscr{C}_f$ est « sous » sa tangente T au voisinage de 0.

2. Propriétés de la fonction f

a. Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
(on ne cherchera pas à déterminer α)

La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \ni 1$.
On en déduit que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Justifier que $\alpha > 0$, puis calculer $\mathrm{ch}(\alpha)$ et exprimer $f(\alpha)$.

On a : $1 > 0$ donc par stricte croissance de la bijection sh : $\mathrm{sh}^{-1}(1) > \mathrm{sh}^{-1}(0) = 0$.
On a donc bien $\alpha > 0$.

Pour tout réel, et en particulier pour α, on a la relation : $\operatorname{ch}(\alpha)^2 - \operatorname{sh}^2(\alpha) = 1$, soit $\operatorname{ch}(\alpha)^2 - 1^2 = 1$, donc $\operatorname{ch}^2(\alpha) = 2$.

Comme ch est une fonction positive on en déduit : $\boxed{\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}}$.

En outre $\alpha \neq 0$ donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha)}$. D'où : $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$

c. Déterminer la parité de la fonction f.
En déduire qu'une restriction du domaine d'étude de la fonction f à $\mathbb{R}_+$ est légitime.

$\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{-x}{\operatorname{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\operatorname{sh}(x)} = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = f(x).$$

La fonction f est donc paire, sont graphe est dès lors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut réduire le domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$ est strictement positive.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = x\operatorname{sh}(x)$$

Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 0. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. *(cf. Chapitre 12 §3.4 Corollaire 4 : Caractérisation des fonctions strictement monotones dérivables)*
Or $g(0) = 0$, donc $x > 0 \implies g(x) > 0$.
La fonction g est donc bien strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. En déduire que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, puis que $\alpha < 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$$

Or sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$, donc cette dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 0.
<u>La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$</u>.

D'après la question **2.b.** on a : $\alpha > 0$ donc, par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$: $f(\alpha) < f(0)$. Or $f(\alpha) = \alpha$ et $f(0) = 1$. On a donc bien $\boxed{\alpha < 1}$.

f. Déterminer un équivalent simple de la fonction g au voisinage de 0.
<u>Remarque</u> : On devine que le premier terme est équivalent à x, et le second à $-x$. Un développement limité à un ordre supérieur à 1 s'impose.

On a :

$$g(x) \underset{0}{=} x\left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)\right) - \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

On en déduit :

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3.$$

g. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x)$.

Remarque : On comprend qu'une telle inéquation est sans doute impossible à résoudre algébriquement car elle mêle l'inconnue x avec $\operatorname{sh}(x)$, c'est à dire avec de l'exponentielle.

Une piste classique est d'étudier le signe de la fonction différence entre chaque membre de l'inégalité.

Soit $h\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x) \end{array}$.

L'application h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad h'(x) = \operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x)(x - \operatorname{ch}(x))$$

Remarque : On est assez convaincu que le second facteur est négatif, mais pour l'établir, nous allons devoir répéter le procédé.

Soit $d\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \operatorname{ch}(x) \end{array}$.

L'application d est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \quad d'(x) = 1 - \operatorname{sh}(x)$$

La fonction sh est strictement croissante, donc la fonction d' est strictement décroissante par composition de fonctions. En outre $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$ donc d' s'annule en α.
On en déduit que d' est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, +\infty[$.
La fonction d admet donc un maximum sur $\mathbb{R}_+$ en α.
Or $d(\alpha) = \alpha - \sqrt{2} < 0$ car $\alpha < 1$.
On en conclut que d est négative, donc par produit que h' est négatif, donc que h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $h(0) = 0$, donc h est négatif. On en conclut finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x)$$

h. Établir que la fonction f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

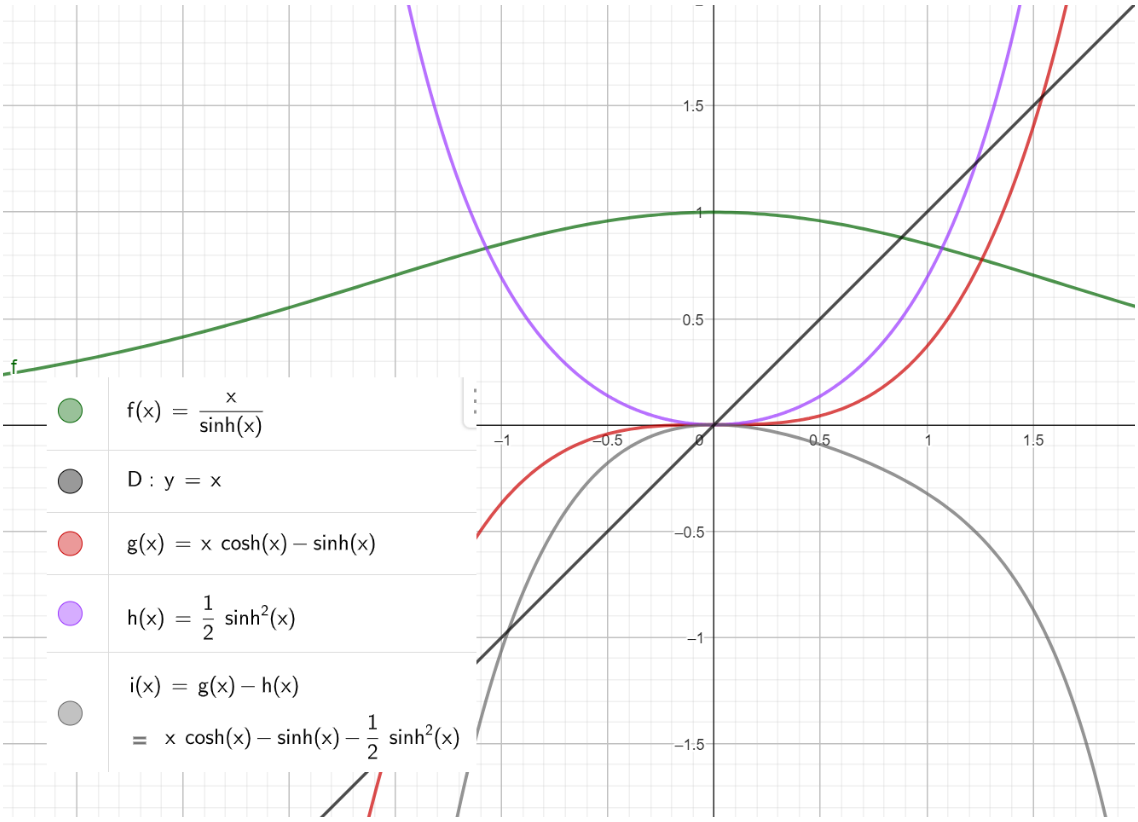
D'après ce qui précède : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{g(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad f'(x) = -\dfrac{g(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$, donc $f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Mais comme établi à la question **e.**, $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(0) = 0$. On en conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

Par symétrie de parité, on en conclut que cette majoration est valable sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est donc $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. *(cf. corollaire 2 §3.3 chapitre 12)*



3. Étude de suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Justifier que la suite u est bien définie, et que tous ses termes sont positifs.

La fonction itératrice f est définie sur $\mathbb{R}$, donc la suite u est bien définie.
La règle du signe d'un quotient permet d'affirmer que f est positive sur $\mathbb{R}^*$. Comme en outre $f(0) = 1 \geqslant 0$, on en conclut que u est à termes positifs.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

La fonction f étant $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a par définition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$$

et en choisissant $y = \alpha$ et pour chaque entier naturel n : $x = u_n$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{\alpha}{2^n}$.

Pour tout entier naturel n, appelons $P(n)$ l'inégalité à établir.
$P(0)$ est trivialement vraie.
Soit n tel que $P(n)$ est vraie. Alors, d'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

c'est à dire que $P(n+1)$ est également vrai.
On conclut par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$$

d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

La suite $\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$, donc convergente de limite nulle.

On en conclut :

$$|u_n-\alpha|\to 0 \qquad \text{soit} \qquad u_n\to\alpha.$$

e. *Question d'approfondissement* : Établir le résultat ci-dessus en utilisant (*entre autres*) le théorème de convergence monotone.

Remarque : La fonction itératrice f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, intervalle stable par f et contenant u_0.

On va ainsi pouvoir établir que la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α, et que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par α.

Exercice 3 : Matrices

Les matrices de cet exercice appartiennent à l'ensemble $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels.

On considère les matrices $\quad M=\begin{pmatrix}-7&0&-8\\4&1&4\\4&0&5\end{pmatrix}\quad$ et $\quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer les puissances de la matrice M par trois méthodes différentes.

Partie 1 – À l'aide d'une matrice diagonale

Soit la matrice $\quad P=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2 et P^3.

Par produit de matrices on obtient : $\quad P^2=\begin{pmatrix}3&0&-4\\-1&1&2\\-2&0&3\end{pmatrix}\quad$ et $\quad P^3=\begin{pmatrix}7&0&-10\\-3&1&5\\-5&0&7\end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $P^3-3P^2+P+I=0_3$. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

Calculons : $\quad 3P^2-P^3=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

On reconnaît $P+I$. On a donc bien : $\quad P^3-3P^2+P+I=0_3$.

Cette égalité est équivalente à : $\quad P(-P^2+3P-I)=I$.

Par définition de l'inversibilité d'une matrice, on en déduit que P est inversible avec :

$$P^{-1} = -P^2 + 3P - I = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Vérifier que la matrice $D = P^{-1}MP$ est diagonale.

Par produit matriciel :

$$D = (P^{-1}M)P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad D^n = P^{-1}M^nP$.

On a :

$$D^n = P^{-1}MP \times P^{-1}MP \times ... \times P^{-1}MP$$

Par associativité du produit matriciel et parce que $P \times P^{-1} = I$ on obtient bien :

$$D^n = P^{-1}M^nP.$$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

On a :

$$D^n = P^{-1}M^nP \quad \iff \quad PD^nP^{-1} = PP^{-1}M^nPP^{-1} \quad \iff \quad M^n = PD^nP^{-1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2(-3)^n \\ 0 & 1 & (-3)^n \\ -1 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie 2 – À l'aide de suites

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis en déduire directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de A^n en fonction de A.

On a :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 = \frac{1}{16}\left(M^2 - 2M + I\right)$$

Or, d'après la formule ci-dessus : $M^2 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Donc par somme de matrices :

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ -16 & 0 & -16 \\ -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$$

Remarque : Le calcul de A^2 ci-dessus est intéressant, mais en l'occurrence, le produit matriciel $A \times A$ était plus simple, donc à privilégier pour un devoir en temps limité.

On en déduit :

$$A^3 = A^2 \times A = -A^2 = A.$$

Ainsi par récurrence immédiate :

$$A^n = (-1)^{n+1}A$$

2. Exprimer M en fonction de A et I.
En déduire une expression de M^2 comme combinaison linéaire des matrices A et I.

L'égalité définissant A est équivalente à : $M = 4A + I$.
D'où, par commutativité du produit matriciel entre les matrices $4A$ et I :

$$M^2 = 16A^2 + 8A + I = I - 8A.$$

3. Démontrer qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I + u_nA$.
(on pourra mettre en oeuvre un raisonnement par récurrence)

On a $M^0 = I$, donc la propriété est vraie à l'ordre 0 en posant $u_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie. Alors :

$$M^{n+1} = M^n(4A + I) = (I + u_nA)(4A + I) = 4A + I + 4u_nA^2 + u_nA = I + (4 - 3u_n)A$$

La propriété est donc vraie au premier rang et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

4. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -3u_n + 4$.
En déduire une expression de u_n en fonction de n.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie à la question précédente comme vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = -3u_n + 4$.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique dont l'équation au point fixe est :

$$x = -3x + 4$$

et a pour solution $r = 1$.
On sait qu'alors la suite $v = u - 1$ est géométrique de raison -3 et de premier terme

$v_0 = u_0 - 1 = -1$.
On en déduit :

$$u_n = -(-3)^n + 1.$$

5. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de M^n.

On en déduit :

$$M^n = I+(1-(-3)^n)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-(-3)^n) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2(-3)^n & 0 & -2+2(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}$$

Partie 3 – Par le binôme de Newton

On considère la matrice $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$.

1. Calculer J^2 et en déduire directement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de J^n.

On calcule : $\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad J^2 = J$.

On en déduit par récurrence immédiate : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad J^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que la matrice J n'est pas inversible.

Méthode 1 : Raisonnement par l'absurde utilisant le résultat précédent
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une matrice K telle que $JK = KJ = I$.

Or on a : $J^2 = J$, donc en multipliant à droite par K on aurait :

$$J(JK) = JK \quad \text{soit} \quad JI = I \quad \text{donc aussi} \quad J = I.$$

Or $J \neq I$, donc on peut affirmer qu'il n'existe pas de matrice K telle que $JK = KJ = I$.

Donc, par définition de l'inversibilité, la matrice J n'est pas inversible.

Méthode 2 : Le plus simple
Les lignes 1 et 3 sont proportionnelles, donc la matrice J n'est pas inversible.

Remarque : On pouvait aussi remarquer que la troisième colonne est égale à deux fois la première moins la deuxième.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de M^n en fonction de n, I et J.

La relation définissant J est équivalente à : $\quad M = 4J - 3I$.

Par commutativité du produit entre $4J$ et $3I$, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I)^{n-k} \\ &= (-3I)^n + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (4)^k (-3)^{n-k} \\ &= (-3)^n I + (-3)^n J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{4}{3}\right)^k \end{aligned}$$

Or :

$$\left(1 - \frac{4}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{4}{3}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{4}{3}\right)^k$$

Donc :

$$(-3)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{4}{3}\right)^k = (-3)^n \times \left(\left(1 - \frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = (-3)^n \times \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) = 1 - (-3)^n$$

On en déduit :

$$M^n = (-3)^n I + (1 - (-3)^n) J = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Espaces vectoriels

1. Déterminer si les ensembles ci-dessous sont ou non des sous espaces vectoriels.
Selon les cas, en proposer une base et en déduire la dimension, ou établir qu'ils sont de dimension infinie.

a. $E_1 = \{(a, -2a, 5a), a \in \mathbb{R}\}$

$$E_1 = \{a(1, -2, 5), a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1, -2, 5)\right)$$

Donc E_1 est la droite vectorielle (donc de dimension 1) dirigée par le vecteur $(1, -2, 5)$.

b. $E_2 = \left\{(x, y, x + y, x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$$E_2 = \left\{x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, 1, -1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)).$$

Les deux vecteurs générant E_2 sont non colinéaires, il en constituent dès lors une base et $\dim(E_2) = 2$.

c. $E_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\right\}$

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{(-2y - 3z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\left((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\right) \end{aligned}$$

On en déduit : $\dim(E_3) = 2$.

d. $E_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\right\}$

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ n'appartient pas à E_4, donc E_4 n'est pas un espace vectoriel.

e. $E_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\right\}$

Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ appartiennent à E_5, mais pas leur somme.
L'addition vectorielle n'étant pas interne à E_5, ce n'est pas un espace vectoriel.

Remarque : E_5 est la réunion de $\text{Vect}((1, 0))$ *et* $\text{Vect}((0, 1))$.
Nouvelle preuve, s'il en était besoin, que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas à priori un sous-espace vectoriel.

f. $E_6 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f(0) + f(1) = f(2)\right\}$

La fonction nulle appartient à E_6 donc E_6 n'est pas vide.

Soit f et g deux fonctions de E_6 et un réel λ.
Alors :

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(0) + (\lambda f + g)(1) &= \lambda f(0) + g(0) + \lambda f(1) + g(1) \\ &= \lambda(f(0) + f(1)) + g(0) + g(1) \\ &= \lambda f(2) + g(2) \\ &= (\lambda f + g)(2) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in E_6$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on en déduit que E_6 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour chaque réel $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$, considérons la fonction f_α nulle en tout point sauf en α. Ces fonctions appartiennent toutes à E_6, sont linéairement indépendantes, et sont en nombre infini. On en déduit que E_6 n'est pas de dimension finie.

g. $E_7 = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, u \text{ est convergente} \right\}$

Les résultats sur les limites de suites nous assurent que la somme de deux suites convergentes est convergente, et que le produit d'une suite convergente par un réel est convergente.
L'ensemble E_7 étant non vide, on en conclut que E_7 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à termes réels.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, considérons la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang k. Elles appartiennent toutes à E_7, sont linéairement indépendantes, et sont en nombre infini. On en déduit que E_7 n'est pas de dimension finie.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1)$, $v = (-2, 1, 1, 0)$ et $w = (0, -1, 3, -2)$.
Soit le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
On pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + t = 0\}$.

a. Déterminer une base et la dimension de F.

On observe que $2u + v = w$.
Le vecteur w est donc une combinaison linéaire de u et de v, on en conclut :

$$\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v).$$

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc ils constituent une base de F, dont la dimension est dès lors $\text{Card}(u, v) = 2$.

b. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

G est non vide car il contient le vecteur nul.
Montrons que si $a = (x, y, z, t)$ et $b = (x', y', z', t')$ appartiennent à G, alors pour tout réel λ, le vecteur

$$a + \lambda b = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', t + \lambda t')$$

appartient aussi à G.
On a :

$$(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z') + (t + \lambda t') = (x + y + z + t) + \lambda(x' + y' + z' + t')$$

Or $x + y + z + t = 0$ et $x' + y' + z' + t' = 0$ car a et b appartiennent à G.
On en conclut :

$$(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z') + (t + \lambda t') = 0$$

On démontre de même que

$$(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') + (t + \lambda t') = 0$$

On en conclut que le vecteur $a + \lambda b$ appartient à G.

Donc, d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, G est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Remarque : L'ensemble G est l'intersection de deux noyaux de deux formes linéaires. Or on sait que le noyau d'une forme linéaire est un sous-espace vectoriel (un hyperplan), et que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

c. Déterminer une base et la dimension de G.

$$(x,y,z,t) \in G \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y & (L1)-(L2) \\ t = -x-2y & (L2) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,y,-x-2y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,1,-2), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,0,-1),(0,1,1,-2)\right). \end{aligned}$$

Les vecteur $(1,0,0,-1)$ et $(0,1,1,-2)$ ne sont pas colinéaires, donc ils constituent une base de G, qui est de fait de dimension 2.

Remarque : Ce qui précède permet aussi d'établir que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

d. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Remarque : Si on avait eu $\dim F + \dim G \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$ on aurait pu conclure simplement qu'ils ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Considérons un vecteur a de $F \cap G$.

$$a \in F \iff \exists(\alpha,\beta), a = \alpha u + \beta v = (\alpha - 2\beta, -\alpha+\beta, \alpha+\beta, -\alpha)$$

$$a \in G \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta - \alpha + \beta + \alpha + \beta - \alpha = 0 \\ \alpha - 2\beta + 2(-\alpha+\beta) - \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = 0$$

On en déduit que $F \cap G = \mathrm{Vect}(v) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Les espaces F et G ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ car ils ne sont pas en somme directe.

Remarque : Après coup, on se rend compte que pour montrer que F et G ne sont pas supplémentaires, il suffit d'établir que le vecteur $v = (-2,1,1,0)$ de F appartient également à G.

e. Montrer que la famille $((1,-1,1,-1),(-2,1,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Remarque : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, il suffit donc de montrer soit que la famille proposée est libre, soit qu'elle est génératrice. Choisissons la première option.

Appelons e_1 et e_2 les troisième et quatrième vecteurs de la famille *(on reconnaît les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$)*. Résolvons l'équation :

$$\alpha u + \beta v + \gamma e_1 + \delta e_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma & = 0 \\ -\alpha + \beta + \delta & = 0 \\ \alpha + \beta & = 0 \\ -\alpha & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

La famille est libre et son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

f. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

La famille (u,v,e_1,e_2) constitue une base de $\mathbb{R}^4$,
donc $F = \text{Vect}(u,v)$ et $H = \text{Vect}(e_1,e_2)$ sont tels que : $F + H = \mathbb{R}^4$.
Or $\dim F = 2$ et $\dim H = \text{Card}(e_1,e_2) = 2$, donc $\dim F + \dim H = \dim \mathbb{R}^4$.
On en conclut, d'après la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie, que $\text{Vect}(e_1,e_2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : $\text{Vect}(e_1,e_2) = \{(x,y,0,0),(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Problème : Intégration

Pour tout entier naturel n on considère :

$$I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans la suite, toutes les questions invoquant n impliquent le sous-entendu : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

Partie 1 : Une expression explicite de I_n.

1. Calculer simplement I_0 et I_1.

$I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1.$

$I_1 = \int_0^1 t(1-t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$

2. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t-t^2)^n\,\mathrm{d}t = 0.$

On pourra effectuer le changement de variable : $u = t - t^2$.

En posant $u = t - t^2$ on a :

$$\mathrm{d}u = (1-2t)\,\mathrm{d}t = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad t = 0 \implies u = 0, \quad t = 1 \implies u = 0$$

D'où :

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^0 -\frac{1}{2}u^n\,\mathrm{d}u = 0$$

b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I_n.$

On pourra remarquer que $t^n(1-t)^n = (t-t^2)^n$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$

4. **a.** Justifier que : $\displaystyle I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$

b. En déduire, à l'aide des questions **2.** et **3.**, que : $\displaystyle I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}I_n.$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle I_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$

Partie 2 : Lien entre I_n et J_n

1. Calculer J_0, J_1 et J_2.

2. Montrer que : $\displaystyle J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$

On pourra effectuer le changement de variable : $t = \pi - x$ dans J_n.

3. Montrer que : $\displaystyle I_n = \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(2u)\big)^{2n+1}\,\mathrm{d}u.$

On pourra effectuer le changement de variable : $t = \cos^2(u)$ dans I_n.

4. En déduire, à l'aide du changement de variable $v = 2u$, que : $\displaystyle I_n = \frac{1}{4^n}J_{2n+1}.$

Partie 3 : Des résultats sur les sommes

1. **a.** A l'aide de l'identité géométrique, écrire sous forme de quotient la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}(t-t^2)^k.$$

b. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.$

2. On pose : $\displaystyle R_n = \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.$

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.$

b. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, $\quad (t(1-t))^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}.$

c. Déduire des questions précédentes : $\quad 0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}}.$

d. Justifier que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3. En déduite la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}.$

4. A l'aide de la formule du binôme de Newton et des résultats de la partie 1, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

$\sim$