Table des matières

Chapitre 23

Variables aléatoires

On jouit moins de ce qu'on obtient que de ce qu'on espère et l'on n'est heureux qu'avant d'être heureux.
Jean-Jacques Rousseau dans *"Julie ou la Nouvelle Héloïse" (1761), 6e partie, lettre VIII*

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

1 Variables aléatoires réelles finies

Définition 1 (Variable aléatoire réelle)
Soit Ω un ensemble fini, et soit E un ensemble.
On appelle variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E toute application

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

Dans le cas où $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle.**
Étant donnée une partie A de E, l'image réciproque de A par l'application X,

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

est un événement que l'on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.
Si A est un singleton $\{x\}$, on emploie plutôt les notations $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.
Si $E \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et si A est un intervalle du type $]-\infty, x]$, on emploie plutôt les notations $\{X \leqslant x\}$ ou $(X \leqslant x)$.

Définition 2 (support de X)
Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. Son image $X(\Omega)$ (qu'il faut interpréter comme l'ensemble des valeurs prises par X) est appelé **support** *de X.*
Puisque Ω est fini, il s'agit d'un ensemble fini.

Expérience 1 : Un joueur lance une pièce trois fois de suite. On note Ω l'univers des possibles.
On attribue une valeur aux résultats de chacun des lancers de la façon suivante :

- si « pile » apparaît, le joueur gagne un point.
- si « face » apparaît, le joueur perd un point.

On définit ainsi une variable aléatoire réelle finie correspondant au gain relatif du joueur à l'issue des trois lancers :

$$G : \Omega \to \mathbb{R}$$

Dans ce cas, le support de G est $G(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Expérience 2 : On lance un dé à six faces : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On s'intéresse à la somme des deux faces obtenues. Ceci définit une variable aléatoire

$$S : \Omega \to \mathbb{R}$$

le support de S est $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$.

Proposition - Définition 1
Soit X une variable aléatoire sur Ω.
Alors $((X = x), x \in X(\Omega))$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X.**
En outre, pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$:

$$(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x)$$

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle finie

Proposition - Définition 2 (Loi d'une variable aléatoire réelle finie)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé (Ω, P).
La loi de X *est alors l'application* $P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_X(A) = P(X \in A) \end{array}$
La loi P_X de X est une probabilité sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$.

Proposition 1
Soit X une variable aléatoire sur Ω. Alors la loi de X est entièrement déterminée par les $P_X(x) = P(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$.
Plus précisément, pour $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, on a

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

<u>En pratique</u> : Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X :

1. On détermine l'ensemble des valeurs prises par X, c'est à dire son ***support***.

2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on calcule $P(X = x)$.

On reprend les deux exemples précédents.

Expérience 1 : $G(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$. On représente la loi de G sous la forme d'un tableau :

x_i	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Expérience 2 : $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$. On représente la loi de S sous la forme d'un tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Proposition 2 (Définition implicite d'un espace probabilisé)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments deux à deux distincts d'un ensemble E, et $p_1, \ldots, p_n$ des réels positifs, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Alors il existe un ensemble fini Ω, une probabilité P sur Ω et une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans E telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X = x_i) = p_i$$

Exercice 1
On considère un dé à six faces truqué de sorte que pour $k \in [\![1, 6]\!]$, la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k. On note X la variable aléatoire définie par le résultat du lancer :

$$X : \Omega \to [\![1, 6]\!]$$

Déterminer la loi de probabilité de X.

Lois finies usuelles

Définition 3 (Loi certaine)
Une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow E$ suit **la loi certaine égale à** *$a \in E$ lorsque $a \in X(\Omega)$ et $P(X = a) = 1$.*

Le modèle équiprobable : loi uniforme

Exercice 2
Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la probabilité uniforme. Soit X une bijection de Ω sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de X.

Définition 4 (Loi uniforme)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé (Ω, P) et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de réels deux à deux distincts.
On dit que X suit la **loi uniforme** *sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lorsque $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.

Exemple 1
On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 10.
Si X désigne le nombre obtenu, $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, 10]\!])$.

Le schéma succès-échec : loi de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est $p \in [0, 1]$. On associe à cette expérience la variable aléatoire réelle X définie par

$X(S) = 1$ et $X(E) = 0$ La loi de X est : $\forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in S \\ 0 & \text{si } \omega \notin S \end{cases}$

Définition 5 (Loi de Bernoulli)
Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé (Ω, P).
On dit que X suit la loi de Bernoulli *de paramètre $p \in [0,1]$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et*

$$P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p = q$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Loi binomiale

Exemple 2
On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès S ou l'échec E. On suppose que la probabilité que S se réalise est p.
On répète n fois, de façon indépendante les unes des autres, l'expérience e.
On note X le nombre de succès obtenus en n tentatives.
On effectue par exemple n lancers d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. On note X le nombre de pile obtenus. Déterminer la loi de X.

Définition 6 (Loi binomiale)
Soit (X, P) un espace probabilisé. On dit que X suit la **loi binomiale** *de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et*

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque : Lorsque $n=1$, il s'agit tout simplement d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.

3 Variables aléatoires indépendantes

Théorème - Définition 1 (Variables aléatoires indépendantes)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- *Soit X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P).*
  On dit que X **et** *Y* **sont indépendantes** *lorsque pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.*
  Il est équivalent d'exiger la caractérisation suivante :
  Pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$
  $$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$
  Dans ce cas, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$
- *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P). On dit que $X_1, \dots, X_n$* **sont (mutuellement) indépendantes** *lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega) \dots$, A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont indépendants.*
  Il est équivalent d'exiger la caractérisation suivante :
  Pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$
  $$P((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$
  Dans ce cas, on note $X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n$

Puisque, pour un univers Ω de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il y a 2^n parties de Ω, on utilisera la caractérisation pour prouver l'indépendance de variables aléatoires.
Mais même avec cette caractérisation, prouver que des variables aléatoires sont indépendantes reste fastidieux.
Cela étant, le plus souvent, l'indépendance des variables aléatoires est une hypothèse fournie par l'énoncé. Nous aurons donc rarement l'occasion de le faire.
En revanche, il est plus fréquent d'avoir à justifier la non indépendance de deux variables aléatoires.
Il s'agit alors d'exhiber deux éléments $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ pour lesquels

$$P((X = x) \cap (Y = y)) \neq P(X = x)P(Y = y)$$

Le plus simple est souvent de trouver deux éléments $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ soient de probabilité non nulles, mais incompatibles.
En effet, on a alors

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = 0 \neq P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple 3
On tire deux boules sans remise dans une urne qui en contient n, numérotées de 1 à n. On note X la variable aléatoire qui donne le numéro de la première et Y le numéro de la seconde.
Montrons que X et Y ne sont pas indépendantes.
Alors $P(X = 1)$ et $P(Y = 1)$ sont non nuls
En revanche, on ne peut avoir la même boule aux deux tirages, donc

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

Le résultat qui suit est souvent utilisé. Pour autant, il est inutile d'apprendre son énoncé. Il faut simplement être capable de le citer et de l'appliquer :

Théorème 2 (Lemme des coalitions)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, E et F deux ensembles, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω et $f : (X_1, \dots, X_m)(\Omega) \to E$ et $g : (X_{m+1}, \dots, X_n)(\Omega) \to F$ deux fonctions.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors les **coalitions** *$f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.*
Cet énoncé se généralise au cas d'un nombre fini quelconque de coalitions.

Intuitivement, ceci signifie que si on regroupe nos variables aléatoires en p «paquets» disjoints, et que pour chaque paquet on crée une nouvelle variable aléatoire ne dépendant que des X_i dans le paquet, alors les p variables ainsi obtenues sont indépendantes.

Exemples 1

- *Si (X_1, X_2) sont des variables aléatoires indépendantes, alors $\left(|X_1|, X_2^2\right)$ sont encore indépendantes.*
- *Si $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ sont des variables aléatoires indépendantes,*
  alors $\left(X_1^2 + e^{X_3}, 4X_2, X_4 - X_5\right)$ sont encore indépendantes.
  En revanche, on ne peut rien dire de l'indépendance éventuelle de
  $\left(X_1^2 + e^{X_2}, 4X_2 + X_3, X_3^2 + X_4 - X_5\right)$ puisque X_3 «figure» dans deux des trois variables (les «paquets» ne sont pas disjoints).

Remarque : Le lemme des coalitions est une implication et non une équivalence.

4 Couples de variables aléatoires

Définition 7 (Couples de variables aléatoires)
Soit E et F deux ensembles.
Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires sur Ω.
L'application $(X, Y) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ *est appelée* **couple de variables aléatoires sur Ω.**
Et si X et Y sont des variables aléatoires ***réelles****, on dit que (X, Y) est un couple de variables aléatoires* ***réelles*** *sur Ω.*

Autrement dit : Un couple de variables aléatoires, c'est la donnée de deux variables aléatoires. C'est une variable aléatoire à valeurs dans $E \times F$.

Exemple 4
On tire deux boules sans remise dans une urne qui en contient n, numérotées de 1 à n.
On note

- *X_1 le numéro de la première boule.*
- *X_2 le numéro de la deuxième boule.*
- *Y le plus grand des numéros obtenus.*

Alors (X_1, X_2) et (X_1, Y) sont des couples de variables aléatoires réelles sur l'espace modélisant cette expérience.

Remarque : Comme pour toute variable aléatoire, à un couple (X, Y) est associé un système complet d'événements, qui est $\{[(X, Y) = (x, y)], (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\}$.
On a toujours $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En revanche, il n'y a pas nécessairement égalité.
Dans l'exemple ci-dessus, $(3, 3) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, mais n'est pas dans $(X_1, X_2)(\Omega)$
Pourtant, on préférera souvent manipuler le système complet d'événements

$$\{[(X, Y) = (x, y)], (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$$

quitte à rajouter des événements vides.
Enfin, remarquons que $[(X, Y) = (x, y)] = [(X = x) \cap (Y = y)]$.
On pourra donc considérer que le système complet d'événements associé au couple (X, Y) est

$$\{[(X = x) \cap (Y = y)], (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$$

Définition 8 (Loi conjointe)
Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur Ω, la loi de $(X, Y) \to E \times F$ est appelée **loi conjointe du couple** (X, Y). *On la note $P_{X,Y}$.*

$$\begin{array}{rccl} P_{X,Y} & : & \mathscr{P}(X(\Omega), Y(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & P((X = x) \cap (Y = y)) = P((X, Y) = (x, y)) \end{array}$$

Définition 9 (Lois marginales)
Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur Ω, la loi de X est appelée **première loi marginale** *du couple (X, Y), et la loi de Y est appelée* **seconde loi marginale**.

La proposition qui suit nous dit que la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales.
Il n'y a pas de réciproque : deux couples de lois conjointes distinctes peuvent avoir les mêmes lois marginales.

Exemple 5
Reprenons l'expérience du lancé de deux dés, où X_1 désigne le résultat du premier dé et X_2 désigne le résultat du deuxième dé.
Les couples (X_1, X_2) et (X_1, X_1) ont mêmes lois marginales. En effet, les deux lois marginales de chacun des couples sont des lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.
Pour autant, il est clair que ces couples n'ont pas la même loi conjointe. Dans le premier cas, les deux variables sont indépendantes, alors que dans le second elles ne le sont pas.
En effet,

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = \frac{1}{36} \qquad et \qquad P((X_1 = 1) \cap (X_1 = 2)) = 0$$

Donc les lois conjointes ne sont pas identiques.

En effet l'information "contenue" dans la loi conjointe, renseigne non seulement sur les lois marginales, mais aussi les éventuels liens qui peuvent exister entre les deux variables.

Proposition 3 (Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe)
Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur (Ω, P). Alors :

$$\forall x \in X(\Omega), \;\; P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

Remarque : Les lois marginales du couple (X, Y) sont déterminées de façon unique par la loi du couple $P_{X,Y}$.

Exercice 3
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 3$). On tire sans remise 3 jetons de l'urne, et on note X (resp. Y) le plus petit (resp. le plus grand) des numéros ainsi obtenus.
Puisque les tirages sans remise peuvent être assimilés à des tirages simultanés, et que tous les tirages sont équiprobables.
Déterminons la loi conjointe de (X, Y) puis la première loi marginale.

Définition 10 (Lois conditionnelles)
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, et soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$,
Alors **la loi conditionnelle de Y sachant** *$(X = x)$ est la loi de Y pour la probabilité $P_{(X=x)}$ (et non pour la probabilité P).*
Autrement dit, c'est la donnée, pour tout $y \in Y(\Omega)$ de $P_{(X=x)}(Y = y)$.
On définit de même, pour $y \in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

5 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 11 (Espérance)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé (Ω, P).
On appelle **espérance** *de X le nombre*

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Remarque : L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par leurs probabilités.

Exemple 6
On reprend l'exemple de l'expérience 1. À partir de la loi de G, on peut calculer l'espérance de gain du joueur :

$$E(G) = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$$

Définition 12 (Variable aléatoire centrée)
Une variable aléatoire X est dite **centrée** *lorsque $E(X) = 0$.*

Proposition 4 (Espérance des lois usuelles)
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

- *Si X suit une loi certaine égale à a, alors $E(X) = a$.*
- *Si X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$*
- *Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors $E(X) = p$.*
- *Si X suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$, alors $E(X) = np$.*

*

Propriétés de l'espérance

Lemme 1
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Proposition 5 (Linéarité de l'espérance)
L'espérance est une forme linéaire sur l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$$

Corollaire 1
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur (Ω, P). Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Corollaire 2 (Centrer une variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur (Ω, P).
Alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.

Proposition 6 (Positivité de l'espérance)
Soit X une variable aléatoire réelle positive sur (Ω, P). Alors $E(X) \geqslant 0$.
De plus, $E(X) = 0$ si et seulement si X suit la loi certaine égale à 0.

Corollaire 3 (Croissance de l'espérance)
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω telles que $X \leqslant Y$.
Alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 3 (Théorème de transfert)
Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'espérance de $Y = g \circ X$ est donnée par :

$$E(Y) = E(g \circ X) = E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

Proposition 7 (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $a > 0$,

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

6 Variance d'une variable aléatoire réelle

L'espérance d'une variable aléatoire représente la valeur moyenne de cette variable aléatoire pondérée par les probabilités des événements $\{X = x_i\}$. Il s'agit d'une ***mesure de position***. Par conséquent, la variable aléatoire se répartit « autour » de son espérance. La ***variance*** de la variable aléatoire mesure l'écart entre la variable aléatoire et son espérance : il s'agit d'une ***mesure de dispersion***.

Définition 13 (Variance, écart-type, variable aléatoire réduite)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé (Ω, P).

- *On appelle* **variance de** X *et on note $V(X)$, le nombre positif*

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$$

- *On appelle* **écart-type de** X *et on note* $\sigma(X)$*, le nombre positif* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- *Une variable aléatoire* X *est dite* **réduite** *lorsque* $V(X) = 1$.

Comme $(X - E(X))^2$ est une variable aléatoire positive, son espérance est positive, ce qui assure que l'écart-type est bien défini.
Remarque : Par définition, $V(X) = E(\tilde{X}^2)$ où $\tilde{X} = X - E(X)$. En notant m l'espérance de X, le théorème de transfert montre que

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P(X = x_i).$$

En particulier, lorsque la variable X est centrée, $V(X) = E(X^2)$.

Exercice 4
Calculer la variance de G *dans l'expérience 1 et de* S *dans l'expérience 2.*

Proposition 8 (Formule de Huygens)
Soit X *une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé* (Ω, P)*. Alors*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

*

Proposition 9 (Propriétés de la variance)
Soit X *une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé* (Ω, P) *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $V(X) \geqslant 0$ *et* $V(X) = 0$ *si et seulement si* X *suit une loi certaine.*
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Proposition 10 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X *une variable aléatoire réelle sur* (Ω, P)*. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Proposition 11 (Centrer et réduire une variable aléatoire)
Soit X *une variable aléatoire qui ne suit pas une loi certaine.*
Alors

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

est une variable centrée réduite, qu'on appelle **variable centrée réduite associée à** X**.**

Proposition 12 (Variances des lois usuelles)
Soit X *une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini* (Ω, P).

- *Si* X *suit une loi certaine égale à* a*, alors* $V(X) = 0$.
- *Si* X *suit une loi uniforme sur* $[\![1, n]\!]$*, alors* $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$
- *Si* X *suit une loi de Bernoulli de paramètre* p*, alors* $V(X) = p(1 - p)$.
- *Si* X *suit une loi binomiale de paramètres* n *et* p*, alors* $V(X) = np(1 - p)$.

*

Covariance et indépendance

Proposition 13
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P). Alors :

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP((X = x) \cap (Y = y))$$

Si, de plus, X et Y sont indépendantes alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Définition 14 (Covariance)
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P). La **covariance de X et Y** *est définie par*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

Proposition 14 (Formule de Huygens)
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P).

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Proposition 15 (Propriétés de la covariance)
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P). Alors :

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{Cov}(aX + Y, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{Cov}(X, aY + Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$
4. $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X) \geqslant 0$

Corollaire 4
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Proposition 16
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P). Alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Corollaire 5
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$\sim$