DS 6 de mathématique

Le sujet propose neuf exercices dont la durée totale devrait excéder la durée dévolue à l'épreuve.
Chacun choisira de traiter les exercices les plus à même de valoriser ses compétences.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre différent.
*Le dernier exercice marqué d'une étoile * est considéré plus difficile.*

Exercice 1 : Quelques questions fondamentales

1. Justifier que tout sous-espace vectoriel inclut le vecteur nul.
2. Dans un espace vectoriel de dimension finie n, donner la caractérisation des bases.
3. Donner la formule donnant la dérivée d'un polynôme.
4. Que peut-on dire du degré d'une somme, d'un produit, et d'une composée de deux polynômes, ainsi que du degré de la dérivée d'un polynôme ?
5. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$? de $\mathbb{R}[X]$?
6. Que peut-on dire de l'ensemble des racines d'un polynôme réel de degré impair ?
7. Présenter la forme générale d'une décomposition primaire dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
8. Dire ce que sont le noyau et l'image d'une application linéaire.

Exercice 2 : Famille de fonctions linéairement indépendantes

Montrer que les fonctions :

$$x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \cos(x) \qquad x \mapsto x\sin(x) \qquad x \mapsto x\cos(x)$$

sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels de matrices

On considère la matrice $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont on donnera une base.
2. Même question pour $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 4 : Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les ensembles :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = 0 \text{ et } y-z+t = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\right).$$

1. Écrire F comme l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs. En déduire une base de F.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : Application linéaire et polynômes

On s'intéresse à l'application : $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$.

1. A l'aide de la caractérisation, établir que l'application f est une application linéaire.
2. Soit $n = \deg(P)$. Justifier que $\deg(f(P)) = n$, sauf dans un cas que l'on précisera.
3. En posant $P = aX^2 + bX + c$, déterminer $\mathrm{Im}(f)$, et en donner une base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, et en donner une base.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Après avoir établi que f^k est défini, déterminer $f^k(aX^2 + bX + c)$.
6. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])}$.

Exercice 6 : Calcul de limite

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités et/ou d'équivalents

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2} - 2\sin(x)}$

Exercice 7 : Développement limité

On considère la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(x^2 + 2x + 2) \end{array}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente Δ au graphe Γ de la fonction f en 0 ainsi que les positions relatives de Δ et Γ au voisinage de 0.

Exercice 8 : Polynôme

Dans chacun des deux cas ci-dessous, déterminer l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la condition, et préciser si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

1. $P'(X^3) = (X+1)P$

2. $(P^2)' = P$

Exercice 9 : Développement limité *

L'objectif de cet exercice est de démontrer des formules classiques à l'aide de développements limités.

Soit n un entier naturel non nul et f une fonction définie au voisinage de 0 par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Premier développement limité

- **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{e}^x - 1$ et de $\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1$.
- **b.** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+u}$.
- **c.** En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f.

2. Second développement limité

- **a.** Écrire $f(x)$ comme une somme.
- **b.** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction f à partir de cette somme.

3. En déduire la formule donnant la somme des n premiers entiers non nuls, et celle donnant la somme des carrés des n premiers entiers non nuls.

$\sim$