DS 1 de mathématique

PROPOSITION DE CORRIGÉ *(avec commentaires)*

Exercice 1

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $\sqrt{x+4} > \frac{1}{3}x + 2$.

1. Tests

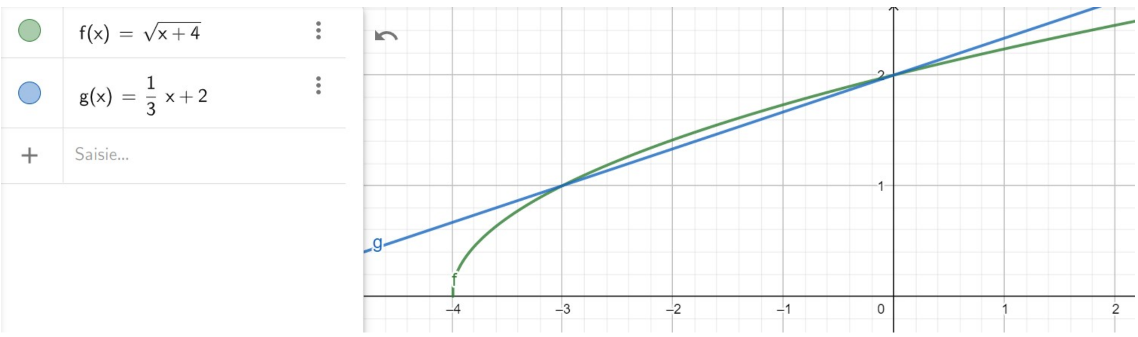
a. Le nombre -5 est il solution de (E) ? *(à justifier)*.
Si $x = -5$ alors $x + 4 < 0$ et l'expression $\sqrt{x+4}$ n'est pas définie *(même pas dans $\mathbb{C}$)*. Donc $-5 \notin S$.

b. Même question pour le nombre -3.
Calculons : $\sqrt{-3+4} = 1$ et $\frac{1}{3} \times (-3) + 2 = 1$.
Si $x = -3$ il y a égalité entre le membre de gauche et le membre de droite de l'inéquation, or l'inégalité est stricte, donc -3 n'est pas solution de l'inéquation.

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cette inéquation.
Les expressions de l'inéquation sont définies si et seulement si l'argument de la racine carrée est positif, à savoir : $x + 4 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -4$. D'où : $\mathscr{D} = [-4; +\infty[$.

3. Conjecture

a. Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathscr{D}$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$.



Remarque : Réalisé sur Géogébra à l'adresse `https://www.geogebra.org/calculator`.

b. A l'aide du graphique, conjecturer l'ensemble solution de l'inéquation (E).
Il semble que la courbe représentative de la fonction f est "au-dessus" de celle de la fonction g uniquement pour les valeurs de x comprises entre -3 et 0.
On peut raisonnablement conjecturer que $S =]-3; 0[$.

4. Résoudre algébriquement l'inéquation (E). *(on sera attentif à la rigueur de rédaction)*
Remarque : Si on applique la fonction carré à chaque membre de l'inégalité on obtiendra une inéquation polynomiale de degré 2, que l'on sait résoudre. Mais pour appliquer une fonction à chaque membre d'une inégalité stricte, il faut que cette fonction soit strictement monotone. La fonction carrée l'est sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Le membre de gauche de l'inégalité étant une racine carrée, il est positif (quand il est défini).
Les valeurs de x pour lesquelles le membre de droite est négatif sont alors nécessairement solution, puisqu'un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif. Mais ce cas ne se présente pas pour $x \in \mathscr{D}$.
Rédigeons, non pas pour traduire toutes ces idées, mais pour aboutir à la conclusion de la façon la plus efficace, à savoir rigoureuse et concise.

On a : $\quad x \in \mathscr{D} \iff x \geqslant -4 \iff \dfrac{1}{3}x \geqslant -\dfrac{4}{3} \iff \dfrac{1}{3}x + 2 \geqslant \dfrac{2}{3} \geqslant 0.$
On en conclue que les deux membres de l'inégalité sont positifs pour tout $x \in \mathscr{D}$. Appliquons alors la fonction carrée qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+4} > \frac{1}{3}x + 2 \\ \iff \quad & x + 4 > \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4 \\ \iff \quad & \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x < 0 \\ \iff \quad & x(x+3) < 0 \quad \textit{(on a multiplié chaque membre de l'inégalité par 9)} \end{aligned}$$

La règle du signe du trinôme *(celle qui dit qu'un trinôme est du signe du coefficient du terme de degré 2 sauf entre les racines, quand il y en a)* nous permet de conclure conformément à la conjecture émise à la question **3b** :

$$S =]-3;0[.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'inéquation (E) : $\quad x + 5 - |x^2 - 9| < 0$.
Si on en a le temps, on pourra illustrer la situation par une représentation graphique

Soit S' l'ensemble solution de l'inéquation sur $\mathbb{R}$. L'ensemble solution sur $\mathbb{Z}$ sera alors : $S = S' \cap \mathbb{Z}$.
Résolvons l'inéquation sur $\mathbb{R}$ dans un premier temps.

On a : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Donc d'après la règle du signe du trinôme *(ou de celle d'un produit)*, on sait que $x^2 - 9$ est négatif pour $x \in [-3;3]$ et strictement positif sinon.

Si $x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$, $\quad |x^2 - 9| = x^2 - 9$, $\quad$ l'inéquation s'écrit alors :

$$-x^2 + x + 14 < 0$$

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 14 = 57 > 0$.

(ce n'est pas toujours un carré parfait...)

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{57}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{57}}{2} > 3.$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}.$
Encadrons les racines :

$$\begin{array}{cc}
49 < 57 < 64 & 49 < 57 < 64 \\
7 < \sqrt{57} < 8 & 7 < \sqrt{57} < 8 \\
\dfrac{1+7}{2} < x_1 < \dfrac{1+8}{2} & \dfrac{1-7}{2} > x_2 > \dfrac{1-8}{2} \\
4 < x_1 < 4,5 & -3,5 < x_2 < -3
\end{array}$$

A l'inverse, si $x \in]-3;3[$, $|x^2-9| = 9-x^2$, l'inéquation s'écrit alors :

$$x^2 + x - 4 < 0$$

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 1 - 4 \times (-4) = 17 > 0$.
Les racines sont : $x_1' = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}.$ et $x_2' = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}.$
Encadrons les racines :

$$\begin{array}{cc}
16 < 17 < 25 & 16 < 17 < 25 \\
4 < \sqrt{17} < 5 & 4 < \sqrt{17} < 5 \\
-\dfrac{1+4}{2} > x_1' > -\dfrac{1+5}{2} & \dfrac{4-1}{2} < x_2' < \dfrac{5-1}{2} \\
-3 < x_1' < -2,5 & 1,5 < x_2' < 2
\end{array}$$

On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{57}}{2}$		-3		$-\frac{1+\sqrt{17}}{2}$		$\frac{\sqrt{17}-1}{2}$		3		$\frac{1+\sqrt{57}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+14$		$-$	0	$+$								$+$	0	$-$	
x^2+x-4						$+$	0	$-$	0	$+$					
$x+5-\|x^2-9\|$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

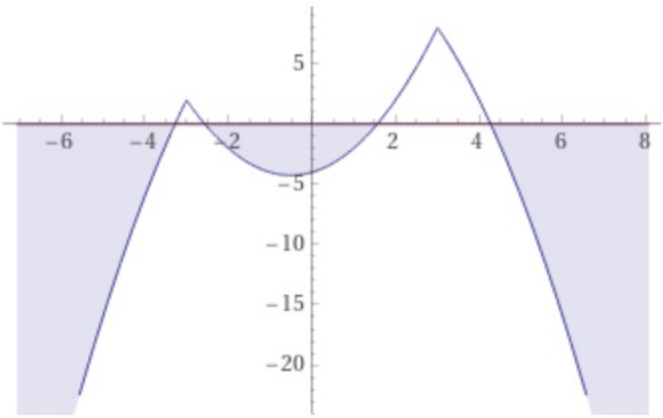
On en déduit l'ensemble solution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$S' = \left]-\infty\ ;\ \frac{1-\sqrt{57}}{2}\right[\ \cup\ \left]-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{1+\sqrt{57}}{2}\ ;\ +\infty\right[.$$

L'ensemble solution sur $\mathbb{Z}$ est donc :

$$S =]\!]-\infty\ ;\ -4]\!]\ \cup\ [\![-2\ ;\ 1]\!]\ \cup\ [\![5\ ;\ +\infty[\![= \mathbb{Z}\backslash\{-3,2,3,4\}.$$

<u>*Représentation graphique*</u> : La courbe représentant les valeurs du membre de gauche.



Source : https://www.wolframalpha.com

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((-3)^k - (nk)^2 + 5^k \times 2^{n-k}\right) \quad ; \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) \quad ; \quad R_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \quad ; \quad T_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

En utilisant la linéarité de la somme, puis la somme des premiers termes d'une suite géométrique, la somme des premiers carrés, et l'identité géométrique on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \left((-3)^k - (nk)^2 + 5^k \times 2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-3)^k - n^2 \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} 5^k \times 2^{n-k} \\ &= \frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)} - n^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{5-2} \\ &= \frac{1}{4}\left(1-(-3)^{n+1}\right) - \frac{1}{6} n^3 (n+1)(2n+1) + \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right) \end{aligned}$$

On peut vérifier que $S_0 = 2$ avec les deux expressions.

Remarque : Les trois produits suivants sont des situations rencontrées en cours.

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n} (k+1)} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

On peut aussi rédiger ainsi :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

$$R_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}((2k-1)\times 2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Le dernier calcul fait penser à celui de P_n :

$$T_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

Il s'agit de diviser le produit des n premiers entiers impairs par le produit des n premiers entiers pairs. Situation non triviale, qui le devient si on se rend compte que l'on vient de calculer ces deux produits.

$$T_n = \frac{R_n}{Q_n} = \frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{\left(2^n (n!)\right)^2}$$

Cette dernière expression se comprend en considérant que l'on divise deux fois le produit des entiers jusqu'à 2n par le produit des entiers pairs jusqu'à 2n.

On vérifie que $T_1 = \dfrac{1}{2}$ et $T_2 = \dfrac{3}{8}$ avec les deux expressions.

On peut, à titre d'exercice, avec profit, vérifier la formule pour $T_3 = T_2 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{16}$ en pensant à la décomposition du numérateur et du dénominateur en produit de facteurs premiers.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Somme des $n+1$ premiers entiers**

   a. Quel résultat du cours permet d'affirmer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{p=0}^{n}(n-p)$?

   Il s'agit du changement d'indice appelé symétrie d'indice (*Proposition 4 du cours*) appliquée à la somme des premiers entiers.

   b. En déduire une démonstration de la formule qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

   D'après la question **a.**, en utilisant la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{p=0}^{n}(n-p) = \sum_{p=0}^{n} n - \sum_{p=0}^{n} p$$

   En ajoutant à chaque membre de l'égalité la somme des $n+1$ entiers on obtient :

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

   soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

2. Somme des $n+1$ premiers cubes

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression :

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2.$$

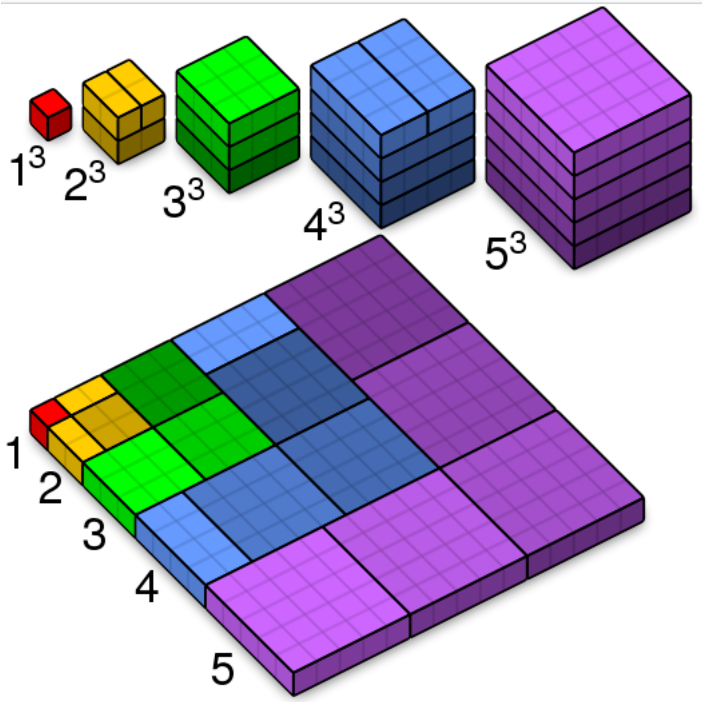
$$\begin{aligned}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 &= \frac{k^2}{4}\left((k+1)^2-(k-1)^2\right)\\ &= \frac{k^2}{4} \times (4k) = k^3\end{aligned}$$

b. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

D'après l'égalité obtenue ci-dessus :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 \qquad \text{par linéarité de la somme}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)k}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Remarque : On observe que la somme des premiers cubes est le carré de la somme des premiers entiers.



Exercice 5

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Remarque : On nous demande d'établir la relation de Pascal. Une méthode naturelle ici est de transformer le membre de droite de l'égalité en réduisant au même dénominateur pour obtenir le membre de gauche.

En utilisant la définition des coefficients binomiaux à l'aide de l'exponentielle on a :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

2. On admet que $\forall n \in [\![2; +\infty[\![$, et $\forall k \in [\![2, n-2]\!]$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ et pour tout k dans l'intervalle $[\![3, n-3]\!]$, une expression de $\binom{n}{k}$ comme somme de coefficients binomiaux de la forme $\binom{n-3}{...}$.

Remarque : Nous avons étudié une situation analogue, et remarqué que l'usage de la relation de Pascal est bien pratique.

Utilisons la relation de Pascal démontrée à la question **1.** :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\ &= \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1} + 2\left(\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-2}\right) + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} \\ &= \binom{n-3}{k} + 3\binom{n-3}{k-1} + 3\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3}\end{aligned}$$

3. Soit $(n, k, p) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k + p \leqslant n$.

Conjecturer une expression de $\binom{n}{k}$ en fonction de coefficients binomiaux de type : $\binom{n-p}{...}$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{p}{0}\binom{n-p}{k} + \binom{p}{1}\binom{n-p}{k-1} + ... + \binom{p}{p}\binom{n-p}{k-p} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{n-p}{k-i}\end{aligned}$$

Remarque : Cette conjecture se démontre naturellement à l'aide d'une récurrence sur p. On peut remarquer qu'on retrouve la formule de Chu-Vandermonde, qui peut donc se démontrer par récurrence à l'aide de la relation de Pascal.

∼