Exercice 1 —

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2.
Calculer l'espérance et la variance de X.

$$\begin{aligned}E(X) &= 1\times 0,1 + 2\times 0,2 + 3\times 0,1 + 4\times 0,3 + 5\times 0,1 + 6\times 0,2\\ &= 0,1+0,4+0,3+1,2+0,5+1,2\\ &= 3,7\end{aligned}$$

Remarque : Pour un « grand » nombre d'expériences, la moyenne des valeurs sera « proche » de 3,7.

$$\begin{aligned}V(X) = &(1-3,7)^2\times 0,1 + (2-3,7)^2\times 0,2 + (3-3,7)^2\times 0,1 + (4-3,7)^2\times 0,3\\ &+ (5-3,7)^2\times 0,1 + (6-3,7)^2\times 0,2\\ =& 2,61\end{aligned}$$

Proposition de programme en Python (code source dans cahier de prépa)

```python
# TD23 Exercice 1 Question 1
X=[[1,0.1],[2,0.2],[3,0.1],[4,0.3],[5,0.1],[6,0.2]]

# TD23 Exercice 1 Question 2
Y=[[3,1/6],[4,1/6],[5,1/6],[6,1/2]]

def EsVar(X):
    # X est la variable aléatoire définie ainsi :
    # [[x1,p1],[x2,p2],...,[xn,pn]]
    E=Esp(X)
    print ('L\'espérance de la variable aléatoire est :',E)
    n=len(X)
    Y=[]
    # Variable aléatoire : carré des écarts à la moyenne
    for k in range (n):
        yk=(X[k][0]-E)**2
        Y.append([yk,X[k][1]])
    V=Esp(Y)
    # La variance est l'espérance des carrés
    # des écarts à la moyenne
    print ('La variance de la variable aléatoire est :',V)

def Esp(X):
    # X est la variable aléatoire définie ainsi :
    # [[x1,p1],[x2,p2],...,[xn,pn]]
    n=len(X)
    E=0 # Espérance
    for k in range (n):
        E+=X[k][0]*X[k][1]
    return E
```

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y<5)=\frac{1}{3},\quad P(Y>5)=\frac{1}{2},\quad P(Y=3)=P(Y=4)$$

Calculer l'espérance et la variance de Y.
$P(Y<5)=P(Y=3)+P(Y=4)=2P(Y=3)=2P(Y=4)=\frac{1}{3}$
donc $P(Y=3)=P(Y=4)=\frac{1}{6}$.
$P(Y>5)=P(Y=6)=\frac{1}{2}$.
Enfin, $P(Y=5)=1-P(Y<5\cup Y>5)=1-P(Y<5)-P(Y>5)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

D'où la loi de probabilité de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Son espérance est : $E(Y)=\frac{1}{6}(3+4+5)+\frac{1}{2}\times 6=\frac{4+6}{2}=5.$

Sa variance est : $V(Y)=\frac{1}{6}((-2)^2+(-1)^2)+\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{4}{3}.$

Exercice 2 —
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y=X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	1\6	1\4	1\6	1\4	1\6

1. Donner la loi du couple (X,Y).
La variable aléatoire Y ne prend que les valeurs 0, 1 ou 4. D'où la loi du couple (X,Y) :

$y_i\backslash x_i$	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

2. Déterminer la loi de Y.

En sommant les lignes du tableau de probabilités précédent :

y_i	0	1	4
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Autre méthode : Si on a pas réalisé le travail ci-dessus :
On a : $Y=4 \iff X^2=4 \iff X\in\{2,-2\}$.
Donc $P(Y=4)=P(X=2)+P(X=-2)=\frac{1}{3}$.
De même on établit : $P(Y=1)=\frac{1}{2}$.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?
Remarque : La réponse semble assez évidente. Prouvons la simplement.

$P((X,Y)=(0,1))=0$, or $P(X=0)\neq 0$ et $P(Y=1)\neq 0$. Donc nécessairement :

$$P((X,Y)=(0,1))\neq P(X=0)\times P(Y=1).$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Que pouvez-vous en déduire ?

Utilisons la formule de Huygens pour la covariance :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

On a :
$$E(XY)=\frac{1}{6}(-2)\times(4)+...$$

Par symétrie on trouve : $E(XY)=0$.
Or on a aussi : $E(X)=0$. Donc
$$\mathrm{Cov}(XY)=0.$$

On sait, d'après le corollaire 4 du cours, que la covariance de deux variables aléatoires indépendantes et nulle.
Cet exemple établit que la réciproque est fausse.

Exercice 3 — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une urne contient une unique boule, qui est blanche.
On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p\in]0,1[$.
Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q=1-p$.
On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux boules pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc...
On ajoute donc $k+1$ boules noires dans l'urne lors de la $k^{\text{ième}}$ obtention de pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Quelle est la loi de X ?

La variable aléatoire X compte le nombre de « succès » à l'issue de n épreuves de Bernoulli de même probabilité p. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2. Exprimer N en fonction de X.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$.
Si $X=k$ alors N prend la valeur :

$$\sum_{i=0}^{k}(i+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

On observe que cette formule est également valable pour $X=0$.
Dès lors :
$$N=\frac{(X+1)(X+2)}{2}$$

3. Calculer l'espérance de N *(on donnera le résultat sous forme de somme).*

D'après le théorème de transfert :

$$E(N)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{2}P(X=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".

4. Démontrer que $P(B)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

Les issues de X constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B)=P(B\cap(X=0))+P(B\cap(X=1))+...+P(B\cap(X=n))$$

Or, d'après la formule des probabilité composées, pour chaque valeur de $k\in[\![1,n]\!]$:

$$P(B\cap(X=k))=P(X=k)\times P_{X=k}(B)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

On obtient donc bien :

$$P(B)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

5. Calculer cette somme.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On a :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!(k+2)!}=\frac{(n+2)!}{(n+2-(k+2))!(k+2)!}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{\binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

donc

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}p^kq^{n-k}\\ &=\frac{2}{p^2(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}p^{k+2}q^{n+2-(k+2)}\\ &=\frac{2}{p^2(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}p^kq^{n+2-k}-q^{n+2}-(n+2)pq^{n+1}\right)\\ &=\frac{2}{p^2(n+1)(n+2)}\left((p+q)^{n+2}-q^{n+2}-(n+2)pq^{n+1}\right)\\ &=\frac{2}{p^2(n+1)(n+2)}\left(1-q^{n+2}-(n+2)pq^{n+1}\right)\end{aligned}$$

On change les règles : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du $k^{\text{ième}}$ pile, c'est à dire une boule pour le premier pile, deux pour le deuxième, quatre pour le troisième, etc... en doublant à chaque fois fois le nombre de boules noires ajoutées.
On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

6. Exprimer N' en fonction de X.
7. Calculer l'espérance de N'.
8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 4 — Soit $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remises dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment là dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Remarque : Il y avait plus simple que la méthode mise en oeuvre ci-dessous, en calculant directement à l'aide de la formule des probabilités composées utilisée plusieurs fois (un arbre éclaire la situation).

$$P(X=k)=P(N_1\cap N_2\cap...\cap N_{k-1}\cap B_k)$$

où N_i (respectivement B_i) est l'événement « la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est noire », (respectivement blanche).

Cependant la méthode ci-dessous permet de mettre en oeuvre une démonstration à l'aide du théorème de récurrence forte.

$X(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$
$$P(X=1)=\frac{2}{n}$$

Remarque : Les calculs ci-dessous sont nécessaires à l'exploration, mais inutiles à la rédaction.

$$P(X=2)=\left(1-\frac{2}{n}\right)\times\frac{2}{n-1}=\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned}P(X=3)&=(1-P(X=1)-P(X=2))\times\frac{2}{n-2}\\ &=\left(1-\frac{2}{n}-\frac{2(n-2)}{n(n-1)}\right)\times\frac{2}{n-2}\\ &=\frac{n(n-1)-2(n-1)-2(n-2)}{n(n-1)}\times\frac{2}{n-2}\\ &=\frac{n^2-5n+6}{n(n-1)}\times\frac{2}{n-2}\\ &=\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\times\frac{2}{n-2}\\ &=\frac{2(n-3)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Considérons la propriété : $P(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
Le calcul ci-dessus établit que la propriété est vraie pour $k=1$.
Supposons que pour une valeur de $k\in[\![1,n-1[\![$, la propriété soit vraie pour tout $i\in[\![1,k]\!]$.
Alors :

$$\sum_{i=1}^{k}P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{2(n-i)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{k}(n-i)=\frac{2}{n(n-1)}\left(nk-\frac{k(k+1)}{2}\right)=\frac{2nk-k(k+1)}{n(n-1)}$$

Dès lors

$$\begin{aligned}P(X=k+1)&=\left(1-\frac{2nk-k(k+1)}{n(n-1)}\right)\times\frac{2}{n-k}\\ &=\left(\frac{n^2-n-2nk+k^2+k}{n(n-1)}\right)\times\frac{2}{n-k}\\ &=\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\times\frac{2}{n-k}\\ &=\frac{2(n-(k+1))}{n(n-1)}\end{aligned}$$

On en conclut, d'après le théorème de récurrence forte, que

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ \boxed{P(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\\ &=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}kn-k^2\\ &=\frac{2}{n(n-1)}\left(n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\\ &=n-\frac{2n-1}{3}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{E(X)=\frac{n+1}{3}}$

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$
Lorsque la première boule blanche a été tirée aux $x^{\text{ième}}$ tirage, il reste $n-x$ boules dans l'urne qui sont toutes rouges sauf une blanche. D'où :

$$Y=n-1-X$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y)=n-1-E(X)=\frac{2n-4}{3}$$

Autre méthode : Plus compliquée, mais constitue une vérification intéressante

D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{n-1}(n-1-k)P(X=k)\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}(n-1-k)\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\\ &=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}n(n-1)+(1-2n)k+k^2\\ &=\frac{2}{n(n-1)}\left(n(n-1)^2+(1-2n)\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)\\ &=2(n-1)+1-2n+\frac{2n-1}{3}\\ &=\frac{2n-4}{3}\end{aligned}$$

Exercice 5 — Banque CCP
Un télé-conseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p\in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
La variable aléatoire X compte le nombre de « succès » à l'issue d'une répétition de n épreuves de Bernoulli de même probabilité p, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2. Le télé-conseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.

   a. Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y=k)$.
   Pour $X=i$, le télé-conseiller rappelle $n-i$ personnes dans les mêmes conditions, donc :

   $$\forall k\in\mathbb{N}:\qquad P_{(X=i)}(Y=k)=\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}$$

   Remarque : Pour $k>n-i$, le coefficient binomial est nul.

   b. Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   Remarque : Z compte le nombre de correspondants obtenus à l'issue des deux séries d'appels.

   Déterminons la loi de probabilité de Z.

   $$\begin{aligned}\forall s\in\mathbb{N}:\qquad P(Z=s)&=\sum_{i=0}^{s}P(X=i\ \cap\ Y=s-i)\\ &=\sum_{i=0}^{s}P(X=i)\times P_{(X=i)}(Y=s-i)\\ &=\sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\times\binom{n-i}{s-i}p^{s-i}(1-p)^{n-s}\\ &=\sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i}p^s(1-p)^{2n-i-s}\\ &=p^s(1-p)^{2n-s}\sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i}(1-p)^{-i}\end{aligned}$$

   Or
   $$\binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}\times\frac{(n-i)!}{(s-i)!(n-s)!}=\frac{n!}{(n-s)!}\times\frac{1}{i!(n-i)!}$$

   Donc

   $$\begin{aligned}P(Z=s)&=\frac{n!}{s!(n-s)!}p^s(1-p)^{2(n-s)}\sum_{i=0}^{s}\frac{s!}{i!(n-i)!}(1-p)^{s-i}\times 1^i\\ &=\frac{n!}{s!(n-s)!}p^s(1-p)^{2(n-s)}(1+1-p)^s\\ &=\binom{n}{s}(1-(2p-p^2))^{n-s}(2p-p^2)^s\end{aligned}$$

   Le trinôme $p(2-p)$ admet un maximum en $p_0=\frac{0+2}{2}=1$ qui vaut $1(2-1)=1$, donc $\forall p\in]0,1[, 2p-p^2\in[0,1]$. On en déduit que Z suit la loi $\mathscr{B}(n,2p-p^2)$.

   c. Déterminer l'espérance et la variance de Z, ainsi que $E(Y)$.
   On en déduit :

   $$E(Z)=np(2-p)\qquad\text{et}\qquad V(Z)=np(2-p)(1-2p+p^2)=np(2-p)(1-p)^2$$

   et, par linéarité de l'espérance :

   $$E(Y)=E(Z-X)=E(Z)-E(X)=n(2p-p^2)-np=np(1-p)$$

   Remarque : On observe que $E(Y)=V(X)$ ...

Exercice 6 —
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Calculer la loi du couple (X,Y).
D'après la formule des probabilités composées :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad\forall i\in[\![1,k]\!]:$$

$$P((X,Y)=(k,i))=P((X=k)\cap(Y=i))=P(X=k)\times P_{X=k}(Y=i)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{k}=\boxed{\frac{1}{nk}}$$

Inversement, si $i>k$, il n'y a pas de boule numérotée i dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, donc :

$$P((X,Y))=(k,i))=0$$

2. Calculer $P(X=Y)$ *(on exprimera le résultat à l'aide d'une somme).*

$$\begin{aligned}P(X=Y)&=P((X,Y)=(1,1))+P((X,Y)=(2,2))+...+P(X,Y)=(n,n))\\ &=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

$$\forall i\in[\![1,n]\!]:\qquad P(Y=i)=\sum_{k=1}^{n}P((X,Y)=(k,i))=\sum_{k=1}^{i-1}0+\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{nk}=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}}$$

et

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i=1}^{n}iP(Y=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}i\qquad\text{par permutation des sommes}\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2n}\times\frac{n(n+3)}{2}=\boxed{\frac{n+3}{4}}\end{aligned}$$

$\sim$