Exercice 1 —

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2.
Calculer l'espérance et la variance de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times 0,1 + 2\times 0,2 + 3\times 0,1 + 4\times 0,3 + 5\times 0,1 + 6\times 0,2 \\ &= 0,1 + 0,4 + 0,3 + 1,2 + 0,5 + 1,2 \\ &= 3,7 \end{aligned}$$

Remarque : Pour un « grand » nombre d'expériences, la moyenne des valeurs sera « proche » de $3,7$.

$$\begin{aligned} V(X) &= (1-3,7)^2\times 0,1 + (2-3,7)^2\times 0,2 + (3-3,7)^2\times 0,1 + (4-3,7)^2\times 0,3 \\ &\quad + (5-3,7)^2\times 0,1 + (6-3,7)^2\times 0,2 \\ &= 2,61 \end{aligned}$$

Proposition de programme en Python (code source dans cahier de prépa)

```python
# TD23 Exercice 1 Question 1
X=[[1,0.1],[2,0.2],[3,0.1],[4,0.3],[5,0.1],[6,0.2]]

# TD23 Exercice 1 Question 2
Y=[[3,1/6],[4,1/6],[5,1/6],[6,1/2]]

def EsVar(X):
    # X est la variable aléatoire définie ainsi :
    # [[x1,p1],[x2,p2],...,[xn,pn]]
    E=Esp(X)
    print ('L\'espérance de la variable aléatoire est :',E)
    n=len(X)
    Y=[]
    # Variable aléatoire : carré des écarts à la moyenne
    for k in range (n):
        yk=(X[k][0]-E)**2
        Y.append([yk,X[k][1]])
    V=Esp(Y)
    # La variance est l'espérance des carrés
    # des écarts à la moyenne
    print ('La variance de la variable aléatoire est :',V)

def Esp(X):
    # X est la variable aléatoire définie ainsi :
    # [[x1,p1],[x2,p2],...,[xn,pn]]
    n=len(X)
    E=0 # Espérance
    for k in range (n):
        E+=X[k][0]*X[k][1]
    return E
```

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y<5)=\frac{1}{3},\quad P(Y>5)=\frac{1}{2},\quad P(Y=3)=P(Y=4)$$

Calculer l'espérance et la variance de Y.

$P(Y < 5) = P(Y = 3) + P(Y = 4) = 2P(Y = 3) = 2P(Y = 4) = \frac{1}{3}$

donc $P(Y = 3) = P(Y = 4) = \frac{1}{6}$.

$P(Y > 5) = P(Y = 6) = \frac{1}{2}$.

Enfin, $P(Y = 5) = 1 - P(Y < 5 \cup Y > 5) = 1 - P(Y < 5) - P(Y > 5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

D'où la loi de probabilité de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Son espérance est : $E(Y) = \frac{1}{6}(3 + 4 + 5) + \frac{1}{2} \times 6 = \frac{4+6}{2} = 5$.

Sa variance est : $V(Y) = \frac{1}{6}((-2)^2 + (-1)^2) + \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{4}{3}$.

Exercice 2 —

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	1\6	1\4	1\6	1\4	1\6

1. Donner la loi du couple (X, Y).

La variable aléatoire Y ne prend que les valeurs 0, 1 ou 4. D'où la loi du couple (X, Y) :

$y_i \backslash x_i$	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

2. Déterminer la loi de Y.

En sommant les lignes du tableau de probabilités précédent :

y_i	0	1	4
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Autre méthode : Si on a pas réalisé le travail ci-dessus :

On a : $Y = 4 \iff X^2 = 4 \iff X \in \{2, -2\}$.

Donc $P(Y = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{3}$.

De même on établit : $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Remarque : La réponse semble assez évidente. Prouvons la simplement.

$P\big((X, Y) = (0, 1)\big) = 0$, or $P(X = 0) \neq 0$ et $P(Y = 1) \neq 0$. Donc nécessairement :

$$P\big((X, Y) = (0, 1)\big) \neq P(X = 0) \times P(Y = 1).$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

4. Calculer $\operatorname{Cov}(X,Y)$. Que pouvez-vous en déduire ?

Utilisons la formule de Huygens pour la covariance :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On a :

$$E(XY) = \frac{1}{6}(-2) \times (4) + ...$$

Par symétrie on trouve : $E(XY) = 0$.
Or on a aussi : $E(X) = 0$. Donc

$$\operatorname{Cov}(XY) = 0.$$

On sait, d'après le corollaire 4 du cours, que la covariance de deux variables aléatoires indépendantes et nulle.
Cet exemple établit que la réciproque est fausse.

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une unique boule, qui est blanche.
On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0,1[$.
Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.
On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux boules pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc...
On ajoute donc $k+1$ boules noires dans l'urne lors de la $k^{ième}$ obtention de pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Quelle est la loi de X ?

La variable aléatoire X compte le nombre de « succès » à l'issue de n épreuves de Bernoulli de même probabilité p. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2. Exprimer N en fonction de X.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Si $X = k$ alors N prend la valeur :

$$\sum_{i=0}^{k}(i+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

On observe que cette formule est également valable pour $X = 0$.
Dès lors :

$$N = \frac{(X+1)(X+2)}{2}$$

3. Calculer l'espérance de N *(on donnera le résultat sous forme de somme)*.

D'après le théorème de transfert :

$$E(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2} P(X=k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".

4. Démontrer que $P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Les issues de X constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(B \cap (X=0)) + P(B \cap (X=1)) + ... + P(B \cap (X=n))$$

Or, d'après la formule des probabilité composées, pour chaque valeur de $k \in [\![1,n]\!]$:

$$P(B \cap (X=k)) = P(X=k) \times P_{X=k}(B) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

On obtient donc bien :

$$P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

5. Calculer cette somme.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!(k+2)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-(k+2))!(k+2)!} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{2}{p^2(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} p^{k+2} q^{n+2-(k+2)} \\
&= \frac{2}{p^2(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} p^k q^{n+2-k} - q^{n+2} - (n+2)pq^{n+1} \right) \\
&= \frac{2}{p^2(n+1)(n+2)} \left((p+q)^{n+2} - q^{n+2} - (n+2)pq^{n+1} \right) \\
&= \frac{2}{p^2(n+1)(n+2)} \left(1 - q^{n+2} - (n+2)pq^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

On change les règles : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du $k^{ième}$ pile, c'est à dire une boule pour le premier pile, deux pour le deuxième, quatre pour le troisième, etc... en doublant à chaque fois fois le nombre de boules noires ajoutées.
On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

6. Exprimer N' en fonction de X.

7. Calculer l'espérance de N'.

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 4 — Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remises dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment là dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Remarque : Il y avait plus simple que la méthode mise en oeuvre ci-dessous, en calculant directement à l'aide de la formule des probabilités composées utilisée plusieurs fois (un arbre éclaire la situation).

$$P(X=k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

où N_i (respectivement B_i) est l'événement « la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est noire », (respectivement blanche).

Cependant la méthode ci-dessous permet de mettre en oeuvre une démonstration à l'aide du théorème de récurrence forte.

$X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$

$$P(X=1) = \frac{2}{n}$$

Remarque : Les calculs ci-dessous sont nécessaires à l'exploration, mais inutiles à la rédaction.

$$P(X=2) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \frac{2}{n-1} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= (1 - P(X=1) - P(X=2)) \times \frac{2}{n-2} \\
&= \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\right) \times \frac{2}{n-2} \\
&= \frac{n(n-1) - 2(n-1) - 2(n-2)}{n(n-1)} \times \frac{2}{n-2} \\
&= \frac{n^2 - 5n + 6}{n(n-1)} \times \frac{2}{n-2} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \times \frac{2}{n-2} \\
&= \frac{2(n-3)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Considérons la propriété : $P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
Le calcul ci-dessus établit que la propriété est vraie pour $k=1$.
Supposons que pour une valeur de $k \in [\![1, n-1[\![$, la propriété soit vraie pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.
Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} P(X=i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2(n-i)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{k} (n-i) = \frac{2}{n(n-1)} \left(nk - \frac{k(k+1)}{2}\right) = \frac{2nk - k(k+1)}{n(n-1)}$$

Dès lors

$$\begin{aligned}P(X=k+1) &= \left(1-\frac{2nk-k(k+1)}{n(n-1)}\right)\times\frac{2}{n-k}\\ &= \left(\frac{n^2-n-2nk+k^2+k}{n(n-1)}\right)\times\frac{2}{n-k}\\ &= \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\times\frac{2}{n-k}\\ &= \frac{2(n-(k+1))}{n(n-1)}\end{aligned}$$

On en conclut, d'après le théorème de récurrence forte, que

$$\forall k\in [\![1,n-1]\!],\ \boxed{P(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}}$$

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\times\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} kn-k^2\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\\ &= n-\frac{2n-1}{3}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{E(X)=\dfrac{n+1}{3}}$

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$

Lorsque la première boule blanche a été tirée aux $x^{ième}$ tirage, il reste $n-x$ boules dans l'urne qui sont toutes rouges sauf une blanche. D'où :

$$Y=n-1-X$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y)=n-1-E(X)=\frac{2n-4}{3}$$

Autre méthode : Plus compliquée, mais constitue une vérification intéressante

D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-1-k)P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(n-1-k)\frac{2(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)+(1-2n)k+k^2 \\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left(n(n-1)^2+(1-2n)\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) \\
&= 2(n-1)+1-2n+\frac{2n-1}{3} \\
&= \frac{2n-4}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 5 — Banque CCP

Un télé-conseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in \,]0,1[$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.

La variable aléatoire X compte le nombre de « succès » à l'issue d'une répétition de n épreuves de Bernoulli de même probabilité p, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2. Le télé-conseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.

a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y=k)$.

Pour $X=i$, le télé-conseiller rappelle $n-i$ personnes dans les mêmes conditions, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \qquad P_{(X=i)}(Y=k) = \binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}$$

Remarque : Pour $k > n-i$, le coefficient binomial est nul.

b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Remarque : Z compte le nombre de correspondants obtenus à l'issue des deux séries d'appels.

Déterminons la loi de probabilité de Z.

$$\forall s \in \mathbb{N} : \qquad \begin{aligned} P(Z=s) &= \sum_{i=0}^{s} P(X=i \,\cap\, Y=s-i) \\ &= \sum_{i=0}^{s} P(X=i) \times P_{(X=i)}(Y=s-i) \\ &= \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \times \binom{n-i}{s-i} p^{s-i}(1-p)^{n-s} \\ &= \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i} p^s (1-p)^{2n-i-s} \\ &= p^s(1-p)^{2n-s} \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i}(1-p)^{-i} \end{aligned}$$

Or

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{s-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(s-i)!(n-s)!} = \frac{n!}{(n-s)!} \times \frac{1}{i!(n-i)!}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Z=s) &= \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s (1-p)^{2(n-s)} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!(n-i)!} (1-p)^{s-i} \times 1^i \\ &= \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s (1-p)^{2(n-s)} (1+1-p)^s \\ &= \binom{n}{s} (1-(2p-p^2))^{n-s}(2p-p^2)^s \end{aligned}$$

Le trinôme $p(2-p)$ admet un maximum en $p_0 = \dfrac{0+2}{2} = 1$ qui vaut $1(2-1)=1$, donc $\forall p \in]0,1[, 2p-p^2 \in [0,1]$. On en déduit que Z suit la loi $\mathscr{B}(n, 2p-p^2)$.

c. Déterminer l'espérance et la variance de Z, ainsi que $E(Y)$.
On en déduit :

$$E(Z) = np(2-p) \qquad \text{et} \qquad V(Z) = np(2-p)(1-2p+p^2) = np(2-p)(1-p)^2$$

et, par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(Z-X) = E(Z) - E(X) = n(2p-p^2) - np = np(1-p)$$

Remarque : On observe que $E(Y) = V(X)$ ...

Exercice 6 —
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
D'après la formule des probabilités composées :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \forall i \in [\![1, k]\!] :$$

$$P((X,Y) = (k,i)) = P((X = k) \cap (Y = i)) = P(X = k) \times P_{X=k}(Y = i) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{nk}}$$

Inversement, si $i > k$, il n'y a pas de boule numérotée i dans la $k^{\text{ième}}$ boîte, donc :

$$P((X,Y)) = (k,i)) = 0$$

2. Calculer $P(X = Y)$ *(on exprimera le résultat à l'aide d'une somme).*

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P((X,Y) = (1,1)) + P((X,Y) = (2,2)) + \ldots + P(X,Y) = (n,n)) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : \qquad P(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} P((X,Y) = (k,i)) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{nk} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k}}$$

et

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} iP(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \qquad \text{par permutation des sommes} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n} \times \frac{n(n+3)}{2} = \boxed{\frac{n+3}{4}} \end{aligned}$$

∼