

Exercice 1 —

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2.
Calculer l'espérance et la variance de X .

$$E(X) = 3,7 \qquad V(X) = 2,61$$

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4)$$

Calculer l'espérance et la variance de Y .

$$E(Y) = 5 \qquad V(Y) = \frac{4}{3}$$

Exercice 2 —

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y) .

$$P((X, Y) = (0, 0)) = P((X, Y) = (-2, 4)) = P((X, Y) = (2, 4)) = \frac{1}{6}$$

$$P((X, Y) = (-1, 1)) = P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{4}$$

Toutes les autres combinaisons de X et Y sont de probabilité nulle.

2. Déterminer la loi de Y .

$$P(Y = 0) = \frac{1}{6} \qquad P(Y = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(Y = 4) = \frac{1}{3}$$

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Non !

4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Que pouvez-vous en déduire ?

$$\text{Cov}(XY) = 0.$$

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une unique boule, qui est blanche.

On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$.

Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux boules pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc...

On ajoute donc $k + 1$ boules noires dans l'urne lors de la $k^{\text{ième}}$ obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Quelle est la loi de X ?

X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Exprimer N en fonction de X .

$$N = \frac{1}{2}X(X + 3)$$

3. Calculer l'espérance de N (on donnera le résultat sous forme de somme).

$$E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}k(k + 3) \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".

4. Démontrer que $P(B) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k + 1)(k + 2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Calculer cette somme.

$$P(B) = \frac{2}{p^2(n + 1)(n + 2)} \left(1 - q^{n+2} - (n + 2)pq^{n+1} \right)$$

On change les règles : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du $k^{\text{ième}}$ pile, c'est à dire une boule pour le premier pile, deux pour le deuxième, quatre pour le troisième, etc... en doublant à chaque fois le nombre de boules noires ajoutées.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

6. Exprimer N' en fonction de X .

7. Calculer l'espérance de N' .

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 4 — Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges.

On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment là dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et l'espérance de X .

$$\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)} \qquad \text{et} \qquad E(X) = n - \frac{2n - 1}{3}$$

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$

$$Y = n - 1 - X \qquad \text{et} \qquad E(Y) = \frac{2n - 4}{3}$$

Exercice 5 — Banque CCP

Un télé-conseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0, 1[$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X .

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

2. Le télé-conseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.

- a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}, P_{(X=i)}(Y = k)$.

$$\forall k \in \mathbb{N} : \qquad P_{(X=i)}(Y = k) = \binom{n-i}{k} p^k (1 - p)^{n-i-k}$$

- b. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

$$Z \sim \mathcal{B}(n, 2p - p^2)$$

- c. Déterminer l'espérance et la variance de Z , ainsi que $E(Y)$.

$$E(Z) = np(2 - p) \qquad ; \qquad V(Z) = np(2 - p)(1 - p)^2 \qquad ; \qquad E(Y) = np(1 - p)$$

Exercice 6 —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) .

$$\forall (k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : \qquad P((X, Y) = (k, i)) = \begin{cases} 1/nk & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

2. Calculer $P(X = Y)$ (on exprimera le résultat à l'aide d'une somme).

$$P(X = Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \quad P(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad E(Y) = \frac{n + 3}{4}$$

