

Exercice 1 —

- Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2.
Calculer l'espérance et la variance de X .
Mise en oeuvre calculatoire de la définition.
Pour la variance, on pourra faire l'économie du calcul sans outil.

- Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4)$$

Calculer l'espérance et la variance de Y .

Traduire les conditions en événements élémentaires, appliquer les propriétés des probabilités.

L'espérance et la variance se calculent ici à la main sans lourdeur.

Exercice 2 —

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

- Donner la loi du couple (X, Y) .
La majorité des combinaisons de valeurs prises par X et Y ont une probabilité nulle.
- Déterminer la loi de Y .
Déterminer la seconde loi marginale à partir de loi conjointe (*proposition 3 page 7 du cours*).
- X et Y sont-elles indépendantes ?
Un contre-exemple suffit.
- Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Que pouvez-vous en déduire ?
On peut utiliser la formule de Huygens pour la covariance.
Que peut-on déduire du résultat ? Considérer le corollaire 4 en dernière page du cours.

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une unique boule, qui est blanche.

On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$.

Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux boules pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc...

On ajoute donc $k + 1$ boules noires dans l'urne lors de la $k^{\text{ième}}$ obtention de pile.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

- Quelle est la loi de X ?
Situation de référence (*page 4 du cours*).
- Exprimer N en fonction de X .
Considérer l'événement $X = k \in [0, n]$ (les lancers de pièces ont fourni k piles) et calculer alors la valeur prise par la variable aléatoire N en sommant le nombre total de boules dans ce cas.
On aboutit à une formule générale de la valeur prise par N en fonction de k , qui permet d'exprimer N en fonction de X .
- Calculer l'espérance de N (on donnera le résultat sous forme de somme).
Utiliser le théorème de transfert (*théorème 3 page 9 du cours*).

On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".

- Démontrer que $P(B) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
On peut utiliser la formule des probabilités totales, puis la formule des probabilités composées.
- Calculer cette somme.
Là ça devient un peu technique...

On change les règles : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention de la $k^{\text{ième}}$ pile, c'est à dire une boule pour le premier pile, deux pour le deuxième, quatre pour le troisième, etc... en doublant à chaque fois le nombre de boules noires ajoutées.

On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

- Exprimer N' en fonction de X .
- Calculer l'espérance de N' .
- Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 4 — Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges.

On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment là dans l'urne.

- Déterminer la loi de X et l'espérance de X .
Pas trivial. Un arbre aide à y voir plus clair.
On peut déterminer d'abord $X(\Omega)$, puis calculer tranquillement : $P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3), \dots$
Émettre une conjecture sur l'expression de $P(X = k)$, et la démontrer à l'aide d'une démonstration utilisant une hypothèse de récurrence forte (*Chapitre 7 théorème 4 - à la fin du chapitre -*).
- Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$
Combien de boules rouges restent dans l'urne après avoir tiré la première boule blanche au $x^{\text{ième}}$ tirage ?
On peut appliquer la linéarité de l'espérance.

Exercice 5 — Banque CCP

Un télé-conseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0, 1[$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- Donner la loi de X .
Un classique.
- Le télé-conseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
 - Soit $i \in [0, n]$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}, P_{(X=i)}(Y = k)$.
La formule des probabilités conditionnelle s'applique évidemment, mais elle ne permet pas d'obtenir le résultat.
Comprendre que dès que $X = i$ est fixé, Y suit une loi binomiale.
 - Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Utiliser la formule des probabilités composées, puis manipuler les deux coefficients binomiaux et les exposants de p et $1 - p$ pour faire apparaître une expression du type :

$$\binom{s}{n} \alpha^s (1 - \alpha)^{n-s} \quad (\text{en s'assurant que } \alpha \in [0, 1])$$

On fera également un usage astucieux de la formule du binôme dans le sens factorisation.

La difficulté calculatoire de cette question est élevée !

- Déterminer l'espérance et la variance de Z , ainsi que $E(Y)$.
Espérance et variance d'une loi binomiale.
L'espérance de Y par la définition est complexe, alors qu'il suffit d'observer que Y est une combinaison linéaire de X et de Z dont on connaît l'espérance.

Exercice 6 —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

- Calculer la loi du couple (X, Y) .
Formule des probabilités composées.
- Calculer $P(X = Y)$ (on exprimera le résultat à l'aide d'une somme).
L'événement est la réunion de n événements élémentaires.
- Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.
Appliquer les définitions.
Pour la loi on devra exprimer le résultat à l'aide d'une somme.
Pour l'espérance, on obtiendra une simplification en sommant les valeurs selon les boîtes plutôt que selon les boules.

