DS 1 de mathématique

Exercice 1

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) : $\sqrt{x+4} > \frac{1}{3}x+2$.

1. Tests

a. Le nombre -5 est il solution de (E) ? *(à justifier)*.

b. Même question pour le nombre -3.

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cette inéquation.

3. Conjecture

a. Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathscr{D}$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{1}{3}x+2$.

b. A l'aide du graphique, conjecturer l'ensemble solution de l'inéquation (E).

4. Résoudre algébriquement l'inéquation (E). *(on sera attentif à la rigueur de rédaction)*

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'inéquation (E) : $x+5-|x^2-9| < 0$.
Si on en a le temps, on pourra illustrer la situation par une représentation graphique

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((-3)^k - (nk)^2 + 5^k \times 2^{n-k}\right) \quad ; \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) \quad ; \quad R_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \quad ; \quad T_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Somme des $n+1$ premiers entiers

a. Quel résultat du cours permet d'affirmer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{p=0}^{n} (n-p)$?

b. En déduire une démonstration de la formule qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

2. Somme des $n+1$ premiers cubes

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression :

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2.$$

b. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 5

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ on a : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

2. On admet que $\forall n \in [\![2; +\infty[\![$, et $\forall k \in [\![2, n-2]\!]$ on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ et pour tout k dans l'intervalle $[\![3, n-3]\!]$, une expression de $\displaystyle\binom{n}{k}$ comme somme de coefficients binomiaux de la forme $\displaystyle\binom{n-3}{\ldots}$.

3. Soit $(n, k, p) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k + p \leqslant n$.

Conjecturer une expression de $\displaystyle\binom{n}{k}$ en fonction de coefficients binomiaux de type : $\displaystyle\binom{n-p}{\ldots}$.