Exercice 1 —

1. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives : 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2.
   Calculer l'espérance et la variance de X.
   Mise en oeuvre calculatoire de la définition.
   Pour la variance, on pourra faire l'économie du calcul sans outil.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5, 6.
   Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que
   $$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4)$$
   Calculer l'espérance et la variance de Y.
   Traduire les conditions en événements élémentaires, appliquer les propriétés des probabilités.
   L'espérance et la variance se calculent ici à la main sans lourdeur.

Exercice 2 —
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $Y = X^2$ et que la loi de X soit donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	1\6	1\4	1\6	1\4	1\6

1. Donner la loi du couple (X, Y).
   La majorité des combinaisons de valeurs prises par X et Y ont une probabilité nulle.

2. Déterminer la loi de Y.
   Déterminer la seconde loi marginale à partir de loi conjointe *(proposition 3 page 7 du cours)*.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?
   Un contre-exemple suffit.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Que pouvez-vous en déduire ?
   On peut utiliser la formule de Huygens pour la covariance.
   Que peut-on déduire du résultat ? Considérer le corollaire 4 en dernière page du cours.

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une unique boule, qui est blanche.
On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0, 1[$.
Les différents lancers de la pièce sont indépendants. On note $q = 1 - p$.
On lance n fois de suite la pièce. On ajoute des boules noires dans l'urne à chaque fois que l'on obtient pile : deux boules pour le premier pile, trois pour le deuxième, etc...
On ajoute donc $k + 1$ boules noires dans l'urne lors de la $k^{ième}$ obtention de pile.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus. On note N la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

1. Quelle est la loi de X ?
Situation de référence *(page 4 du cours)*.

2. Exprimer N en fonction de X.
Considérer l'événement $X = k \in [\![0, n]\!]$ (les lancers de pièces ont fourni k piles) et calculer alors la valeur prise par la variable aléatoire N en sommant le nombre total de boules dans ce cas.
On aboutit à une formule générale de la valeur prise par N en fonction de k, qui permet d'exprimer N en fonction de X.

3. Calculer l'espérance de N *(on donnera le résultat sous forme de somme)*.
Utiliser le théorème de transfert *(théorème 3 page 9 du cours)*.

On tire une boule de l'urne et on pose B : "la boule tirée est blanche".

4. Démontrer que $P(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
On peut utiliser la formule des probabilités totales, puis la formule des probabilités composées.

5. Calculer cette somme.
Là ça devient un peu technique...

On change les règles : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du $k^{ième}$ pile, c'est à dire une boule pour le premier pile, deux pour le deuxième, quatre pour le troisième, etc... en doublant à chaque fois fois le nombre de boules noires ajoutées.
On note N' la variable aléatoire égale au nombre total de boules dans l'urne à la fin des lancers.

6. Exprimer N' en fonction de X.

7. Calculer l'espérance de N'.

8. Déterminer la probabilité de l'événement B' : "la boule tirée est blanche".

Exercice 4 — Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remises dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment là dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
Pas trivial. Un arbre aide à y voir plus clair.
On peut déterminer d'abord $X(\Omega)$, puis calculer tranquillement : $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, ...
Émettre une conjecture sur l'expression de $P(X = k)$, et la démontrer à l'aide d'une démonstration utilisant une hypothèse de récurrence forte *(Chapitre 7 théorème 4 - à la fin du chapitre -)*.

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$
Combien de boules rouges restent dans l'urne après avoir tiré la première boule blanche au $x^{ième}$ tirage ?
On peut appliquer la linéarité de l'espérance.

Exercice 5 — Banque CCP

Un télé-conseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
   Un classique.

2. Le télé-conseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
   La formule des probabilités conditionnelle s'applique évidemment, mais elle ne permet pas d'obtenir le résultat.
   Comprendre que dès que $X = i$ est fixé, Y suit une loi binomiale.

   b. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   Utiliser la formule des probabilités composées, puis manipuler les deux coefficients binomiaux et les exposants de p et $1 - p$ pour faire apparaître une expression du type :
   $$\binom{s}{n}\alpha^s(1-\alpha)^{n-s} \qquad \text{(en s'assurant que } \alpha \in [0,1])$$
   On fera également un usage astucieux de la formule du binôme dans le sens factorisation.

   La difficulté calculatoire de cette question est élevée !

   c. Déterminer l'espérance et la variance de Z, ainsi que $E(Y)$.
   Espérance et variance d'une loi binomiale.
   Le calcul de l'espérance de Y par la définition est complexe, alors qu'il suffit d'observer que Y est une combinaison linéaire de X et de Z dont on connaît l'espérance.

Exercice 6 —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
   Formule des probabilités composées.

2. Calculer $P(X = Y)$ *(on exprimera le résultat à l'aide d'une somme)*.
   L'événement est la réunion de n événements élémentaires.

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.
Appliquer les définitions.
Pour la loi on devra exprimer le résultat à l'aide d'une somme.
Pour l'espérance, on obtiendra une simplification en sommant les valeurs selon les boîtes plutôt que selon les boules.

$\sim$