Exercice 1 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{3^n}$
2. $\sum \frac{5^n}{6^n}$
3. $\sum \frac{2^n + 3^n}{6^n}$
4. $\sum \frac{3}{4^n}$
5. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$
6. $\sum \frac{3^{n-1}}{4^{n+2}}$

Exercice 2 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{n^2-1}$
2. $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$\frac{1}{4}$$

3. $\sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

$$\frac{5}{2}$$

4. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$

$$\ln(3)$$

5. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
6. $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
7. $\sum \frac{1}{n^2-4}$

Exercice 3 — Préciser la nature des séries suivantes

1. $\sum \frac{3^n}{4^n+1}$
   Convergente
2. $\sum \frac{n^2}{n!}$
   Convergente
3. $\sum \frac{\mathrm{e}^{-2n} + n}{n^3+2}$
   Convergente
4. $\sum \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
   Convergente

5. $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$
Divergente.

6. $\sum \frac{n}{(\ln(n))^n}$

7. $\sum \frac{(\ln(n))^n}{n^3}$

8. $\sum \frac{2^n}{n^2}$

9. $\sum \frac{n(n-1)}{6^n}$

10. $\sum \frac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$

11. $\sum \frac{1}{\ln(n)}$
Divergente.

12. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
Convergente

13. $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

14. $\sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$

15. $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$

16. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

17. $\sum \left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$

18. $\sum \frac{1}{(\ln(n))^n}$

19. $\sum \frac{(\ln(n))^3}{n^2}$

20. $\sum n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

21. $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

22. $\sum \frac{\sin^4(n)}{n^2+\cos(n^{10})}$
Convergente

23. $\sum \frac{1}{(\ln(n))^2}$

24. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

25. $\sum \frac{2^n+\sin(n)}{n!}$

26. $\sum \frac{2\ln(n)+\sqrt{n}}{n^2+3n+2}$

27. $\sum \ln\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)$
Divergente

28. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$
Divergente

29. $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$
Convergente

30. $\sum \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$
Divergente (grossièrement !)

31. $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)^n$

32. $\sum \dfrac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$

33. $\sum \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n}\right)$
Convergente

34. $\sum \dfrac{1}{\ln(\mathrm{ch}(n))}$

35. $\sum \ln\left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
Convergente

36. $\sum \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n}$

Exercice 4 — Préciser la nature des séries de terme général :

1. $u_n = n + \dfrac{1}{2} - \sqrt{n^2+n+\dfrac{1}{4}}$
2. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
4. $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
5. $u_n = \left(\ln(n^2+1)-\ln(n^2)\right)^n$
6. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^n)-n$
8. $u_n = \left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$
9. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice 5 — Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n+1}}$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{3}$$

2. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}$

   Diverge si $x \leqslant 0$.

   Si $x > 0$, converge vers $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

3. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{3^n}$

5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3 + n2^n}{4^{n+2}}$

6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$

7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4(-1)^n}{n!}$

   Convergente vers $\frac{4}{\mathrm{e}}$

8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$

   Convergente vers $x^2\mathrm{e}^x$

9. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

10. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Exercice 6 — Série Harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

L'objectif de cet exercice est de démontrer par comparaison à des intégrales que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et de donner un équivalent de H_n.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
4. Prouver $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 7 —

1. Justifier de la convergence de $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 8 — Séries de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n)^\beta)}$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ suivant la valeur de β à l'aide d'une comparaison à une intégrale.
La série converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\sim$