Chaque résultat numérique de ces exercices peut être testé à l'aide des fonctions Python ci-dessous (*disponibles dans cahier de prépa informatique/Math/Suites et séries*).
Les fonctions `p0` et `S0` traitent les cas de séries dont le terme général est défini dès le rang 0.
Les fonctions `p` et `S` traitent les autres cas en prenant comme second paramètre le premier rang pour lequel le terme général est défini.

```
def u(n):
#    un=np.cosh(n)/4**n # TD25 Ex 1 Q 5
#    un=1/(n*(n+1)*(n+2)) # TD25 Ex 2 Q 2
    un=5/((2*n+1)*(2*n+3)) # TD25 Ex 2 Q 3
    return un

def p0(N):
# affichage des N+1 premiers termes de la suite u en partant de 0
    for n in range(N):
        print('u',n,'=',u(n))

def p(N,n0):
# affichage des N+1-n0 premiers termes de la suite u en partant de n0
    for n in range(n0,N):
        print('u',n,'=',u(n))

def S0(N):
# somme des N+1 premiers termes du rang 0 à N
# de la suite u(n) définie dans la fonction u
    S=0
    for n in range(N+1): # n va de 0 à N
       S+=u(n)
       print('S',n,'=',S)
    return S

def S(N,n0):
    # somme des N+1-n0 premiers termes du rang n0 à N
    # de la suite u(n) définie dans la fonction u
    S=0
    for n in range(n0,N+1): # n va de n0 à N
       S+=u(n)
       print('S',n,'=',S)
    return S
```

Exercice 1 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{3^n}$
2. $\sum \frac{5^n}{6^n}$
3. $\sum \frac{2^n+3^n}{6^n}$
4. $\sum \frac{3}{4^n}$
5. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$
6. $\sum \frac{3^{n-1}}{4^{n+2}}$

Exercice 2 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{n^2-1}$
2. $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   On pourrait démontrer que cette série à termes positifs converge en établissant que son

terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$ (théorème 6 : Comparaison par des équivalents) , terme général d'une série de Riemann convergente (théorème 7) ou , plus simplement encore, en majorant son terme général par ce même $\dfrac{1}{n^3}$ (théorème 5 : Comparaison par des inégalités) .
Mais le calcul de la somme comme limite de la suite des sommes partielles nous amènera à établir la convergence, donc le préalable ci-dessus n'a pas à figurer dans une rédaction efficace pour répondre à la question posée.

La méthode est de décomposer la fraction de polynômes en somme d'éléments simples de numérateur constant et de dénominateur n, $n+1$ et $n+2$.
En calculant les premiers termes des sommes partielles, on observe des simplifications télescopiques.

Pour établir le résultat, il conviendra d'exprimer une somme partielle quelconque (que l'on peut désigner par S_N). Après avoir fait valoir la linéarité des sommes finies, par décalage d'indice et complémentation sommative et soustractive, on peut exprimer chaque somme dépendant de N à l'aide du terme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. Alors les simplifications salvatrices entrevues dans le calcul des premiers termes se réaliseront rigoureusement et il nous restera des termes constants et d'autres de limite nulle.

3. $\displaystyle\sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
Par comparaison (équivalent ou majoration) avec une série de Riemann, on se convainc rapidement que la série converge.
La méthode exposée à la question précédente est opérante dans ce cas plus simple.

4. $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$
On s'assure qu'il n'y a pas divergence grossière en observant que l'argument de la fonction logarithme népérien tend vers 1 par équivalence.
Une somme de logarithme est le logarithme du produit.
Des simplifications dans ce produit sont envisageables.
Le recours à l'écriture factorielle est une idée qui peut alléger la rédaction.
On peut aussi invoquer des simplifications télescopiques.

5. $\displaystyle\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
Attention au rang du premier terme général de la série.
On s'assure qu'il n'y a pas divergence grossière en observant que l'argument de la fonction logarithme népérien tend vers 1.
Une somme de logarithme est le logarithme du produit.
Des simplifications dans ce produit sont envisageables.
Le recours à l'écriture factorielle est une idée qui peut alléger la rédaction.
On peut aussi invoquer des simplifications télescopiques.

6. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
Simplifications télescopiques

7. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2-4}$

Réduction de fraction de polynôme et simplifications télescopiques.

Exercice 3 — Préciser la nature des séries suivantes

1. $\sum \dfrac{3^n}{4^n+1}$
   Équivalent.

2. $\sum \dfrac{n^2}{n!}$
   On a : $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!} \times \dfrac{n}{n-1} \sim \dfrac{1}{(n-2)!}$ Méthode qui est un classique : minorer $n!$ par 2^{n-1}.
   Série géométrique.

3. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-2n}+n}{n^3+2}$
   Équivalent simple du terme général de la suite.
   Série de Riemann.

4. $\sum \dfrac{\sin^2(n)}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
   Majoration, équivalent, série de Riemann convergente.

5. $\sum \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$
   La question élude le problème de l'existence du terme général de la série. Il faut en effet :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : \cos(n) \neq 0 \qquad \text{soit} \qquad \forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 : n \neq k\pi$$
   Ce qui est acquis étant donné que π n'est pas un nombre rationnel.
   Minoration par une série de Riemann divergente.

6. $\sum \dfrac{n}{(\ln(n))^n}$

7. $\sum \dfrac{(\ln(n))^n}{n^3}$

8. $\sum \dfrac{2^n}{n^2}$

9. $\sum \dfrac{n(n-1)}{6^n}$

10. $\sum \dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$

11. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$
    La concavité de ln permet une majoration de $\ln(x)$ par $x-1$.
    Minoration par une série divergente.

12. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
    Écrire par exemple $\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \times \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, en déduire que le terme général de la série est

un « petit o » du terme d'une série de Riemann convergente (cf. remarque à la toute fin du cours).

13. $\sum \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

14. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$

15. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

16. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

17. $\sum \left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$

18. $\sum \dfrac{1}{(\ln(n))^n}$

19. $\sum \dfrac{(\ln(n))^3}{n^2}$

20. $\sum n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

21. $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

22. $\sum \dfrac{\sin^4(n)}{n^2+\cos(n^{10})}$

Majorer par une série convergente.

23. $\sum \dfrac{1}{(\ln(n))^2}$

24. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

25. $\sum \dfrac{2^n+\sin(n)}{n!}$

26. $\sum \dfrac{2\ln(n)+\sqrt{n}}{n^2+3n+2}$

27. $\sum \ln\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)$

28. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

Équivalent de $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et de $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

29. $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$

La multiplication et division par l'expression conjuguée nous permet de montrer que le terme général est un nombre qui tend vers 0 élevé à la puissance n...

30. $\sum \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$

Il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur.
On peut établir que ce quotient est minoré par 1.

31. $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)^n$

32. $\sum \dfrac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$

33. $\sum \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n}\right)$
Équivalent, majoration par une série de Riemann convergente.

34. $\sum \dfrac{1}{\ln(\operatorname{ch}(n))}$

35. $\sum \ln\left(\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
Développement limité en 0 des fonctions ch et $x \mapsto \ln(1+x)$ pour obtenir un équivalent.

36. $\sum \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n}$

Exercice 4 — Préciser la nature des séries de terme général :

1. $u_n = n + \dfrac{1}{2} - \sqrt{n^2+n+\dfrac{1}{4}}$
2. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
4. $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
5. $u_n = \left(\ln(n^2+1) - \ln(n^2)\right)^n$
6. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^n) - n$
8. $u_n = \left(\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$
9. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice 5 — Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n+1}}$
   $a^{m+n} = a^m \times a^n$ et $a^{bc} = \left(a^b\right)^c$.
   Série géométrique.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}$
   $\mathrm{e}^{-nx} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^n$.
   On reconnaît une série géométrique.
   Discuter selon les valeurs de x.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
   Déjà vu à l'exercice 2 dans la question 5.

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{3^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3+n2^n}{4^{n+2}}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{ch}(n)}{3^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4(-1)^n}{n!}$

   On reconnaît un cas du puissant théorème 3.

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$

   Simplifier le terme général en $\dfrac{x^n}{(n-2)!}$, puis factoriser par x^2 pour faire apparaître le cas du théorème 3.

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Exercice 6 — Série Harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

L'objectif de cet exercice est de démontrer par comparaison à des intégrales que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et de donner un équivalent de H_n.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

   Invoquer la décroissance de la fonction inverse et croissance de l'intégrale.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   Sommation terme à terme les inégalités de la question **1.** pour les bonnes valeurs de k, relation de Chasles pour les intégrales et calcul d'intégrale par primitivation.

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

   Théorème de minoration.

4. Prouver $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   Caractérisation de l'équivalence par les quotients (théorème 4 chapitre 15).

   On sera amené à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$.

   On peut écrire que : $\quad \ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 7 —

1. Justifier de la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

   Comparaison et absolue convergence.

2. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

   Observer que la première série est la somme des termes de rang impaire de la série des inverses des carrés. Compléter par les termes de rang paire.

Pour la seconde série, séparer les termes positifs des termes négatifs, et utiliser les résultats précédents.

Exercice 8 — Séries de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n)^\beta)}$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

Traiter séparément les cas où β est nul, positif, puis négatif.
Dans ce dernier cas, il faut une ruse de Sioux.

2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

Des raisonnements analogues à ceux de la question **1.**, mais dans l'autre sens, sont pertinents.

3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

On peut minorer le terme général de la série à partir du rang $n = 3$ par celui de la série harmonique.

4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ suivant la valeur de β à l'aide d'une comparaison à une intégrale.

Remarque : On sait que $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ est le cas « tangent » de la série de Riemann divergente. Avec $\beta > 0$, on donne un petit coup d'accélérateur vers 0 au terme général ...
Utiliser le théorème 7, calculer l'intégrale pour $n \in \mathbb{N}^*$, regarder ce qui se passe quand n tend vers $+\infty$.

$\sim$