Table des matières

Chapitre 25

Séries numériques

C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.
Henri Poincaré

1 Définition des séries numériques, convergence et somme

Définition 1 (Somme partielle, série de terme général u_n)
Étant donnée une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la **série de terme général** u_n*. On la note simplement :*

$$\sum u_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geqslant 0} u_n \qquad \text{au lieu de } \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, S_p s'appelle la **somme partielle de rang** p *de la série $\sum u_n$.*

Exercice 1
Soit $p \in \mathbb{N}$. Explicitez les sommes partielles de rang p des séries suivantes :

1. $\sum n$ *2.* $\sum n^2$ *3.* $\sum n^3$ *4.* $\sum q^n$ *où q désigne un réel fixé.* *

La définition qui suit donne un sens aux **sommes infinies** comme **limite** de sommes finie :

Définition 2 (Convergence des séries)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum u_n$ est dite **convergente** *lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.*

- *En ce cas, la* **somme de la série** *est la limite des sommes partielles. On note*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- *Dans le cas contraire, on dit que la série est* **divergente***.*
- *Lorsque la suite des sommes partielles est divergente vers $\pm\infty$, on dit que la série est* **divergente vers** $\pm\infty$*.*
- *Déterminer* **la nature** *de la série $\sum u_n$, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.*

Remarque : Une série étant convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente, tous les théorèmes sur les suites peuvent se traduire en des énoncés sur les séries. Il suffit d'appliquer ces résultats à la suite des sommes partielles.

Exercice 2 (Un premier exemple de référence)
Considérons la série : $\sum \frac{1}{n^2}$.

1. *Montrer que la suite des sommes partielles de cette série est majorée.*
   Indication : On pourra commencer par remarquer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$.
2. *En déduire que la série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Exercice 3 (Convergence de la série harmonique alternée)
Considérons la série dite **série harmonique alternée** *:* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ *la somme partielle de rang* n *de cette série.*

1. *Démontrez que les suites extraites* $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes.* *
2. *En déduire que la série harmonique alternée est convergente.* *

Proposition - Définition 1 (Restes d'une série convergente)
Soit $\sum u_n$ *une série* ***convergente****.*

On définit pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ **le reste d'ordre** p *de la série* $\sum u_n$ *par :* $\quad R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$

de sorte que : $\qquad \forall p \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p$.

La suite $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est* ***convergente de limite nulle****.*

Remarque : En d'autres termes, si $\sum u_n$ est une série convergente, de somme S, S_p est une approximation de S à R_p près. Il sera donc particulièrement utile de connaître une estimation du reste, aussi fine que possible.

Exercice 4 (Estimation du reste de la série harmonique alternée)
Reprenons la série harmonique alternée définie précédemment.
Soit $p \in \mathbb{N}$. *On note* R_p **le reste d'ordre** p *de cette série convergente.*

1. *Démontrez que pour tout entier* $p \in \mathbb{N}^*$, $|R_p| \leqslant \frac{1}{p+1}$.
2. *Comment suffit-il de choisir l'entier* p *pour que* S_p *soit une valeur approchée de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *à* 10^{-3} *près ?*

Théorème 1 (Opérations sur les séries)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. ***Multiplication par un scalaire :*** $\sum u_n$ *et* $\sum \lambda u_n$ *ont même nature.*
2. ***Somme :*** *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, la série* $\sum (u_n + v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

   Si la série $\sum u_n$ *converge et que la série* $\sum v_n$ *diverge, la série* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge.*
3. ***Parties réelle et imaginaire :*** *La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries* $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ *convergent.*

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum u_n$ *converge* **alors** (u_n) *est convergente de limite nulle.*

Définition 3 (Divergence grossière)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** *lorsque* (u_n) *n'admet pas 0 pour limite.*

Exercice 5 (Divergence de la série harmonique)
Considérons la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *appelée* **série harmonique**, *et notons, pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, S_p *la somme partielle de rang* p *de cette série.*

1. *Prouvez pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'inégalité :* $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que la série harmonique est divergente. Est-elle grossièrement divergente ?*

Théorème 3
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, *la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *converge et :* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

*

2 Séries à termes positifs

Dans cette section nous nous intéressons au cas particulier de référence des séries dont le terme général u_n est un réel positif :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$$

Comme la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, les résultats de cette partie s'adaptent aux séries numériques dont le terme général est positif ***à partir d'un certain rang***. Puisque la nature d'une série est inchangée par multiplication par un scalaire, les résultats de cette partie s'adaptent aux séries numériques dont le terme général est négatif ***à partir d'un certain rang***.

Théorème 4 (Théorème de la limite monotone adapté aux séries)
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On note* (S_n) *la suite des sommes partielles :*

La suite (S_n) *est croissante.*

$\sum u_n$ *est convergente si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

- *En cas de convergence :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.
- *En cas de divergence, la suite* (S_n) *diverge vers* $+\infty$*, on note :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 5 (Comparaison par des inégalités)
Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ *deux suites réelles à termes positifs.*
On suppose de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

- *Si la série* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge aussi et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- *Si la série* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Théorème 6 (Comparaison par des équivalents)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose que :* $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge).*

Comparaison série-intégrale

Proposition 1 (Comparaison série/intégrale)
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue, positive et décroissante.*
Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ *converge si et seulement si la suite* $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Théorème 7 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$*. Alors la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
Ces séries sont appelées **séries de Riemann***, et le cas particulier où* $\alpha = 1$*, donc la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$*, est appelé* **série harmonique**.

On veillera à ne pas confondre les **sommes** de Riemann et les **séries** de Riemann.

Remarque : **Lien suite-série**
On peut ramener l'étude d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, à l'étude d'une série en procédant de la manière suivante :
Posons pour, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = a_n - a_{n-1}$.
On vérifie par télescopage que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = a_n - a_0$.
De sorte que la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes et le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

3 Séries absolument convergentes

Définition 4 (Absolue convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On dit que $\sum u_n$ *est* **absolument convergente** *lorsque la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Les techniques développées au paragraphe précédent ne s'appliquent qu'aux séries à termes réels positifs. La convergence absolue permet de ramener l'étude de la nature d'une série à termes quelconques (complexes ou de signe non constant) à celle d'une série à termes positifs.

Théorème 8 (Condition suffisante de convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Si* $\sum u_n$ *est absolument convergente, alors* $\sum u_n$ *est convergente.*

Dans ce cas : $$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

*

Définition 5 (Semi-convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la série $\sum u_n$ *est* **semi-convergente** *lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.*

Théorème 9 (Convergence absolue par domination)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *à termes positifs.*
Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge absolument (et donc converge).*

Remarque : Nous savons que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. Ainsi, le théorème de comparaison par domination est souvent utilisé avec des petits o sans revenir à des grands O. *

$\sim$