Table des matières

Chapitre 25

Séries numériques

C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.
Henri Poincaré

1 Définition des séries numériques, convergence et somme

Définition 1 (Somme partielle, série de terme général u_n)
Étant donnée une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la **série de terme général** u_n*. On la note simplement :*

$$\sum u_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geqslant 0} u_n \qquad \text{au lieu de } \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, S_p s'appelle la **somme partielle de rang** p *de la série* $\sum u_n$.

Exercice 1
Soit $p \in \mathbb{N}$. Explicitez les sommes partielles de rang p des séries suivantes :

1. $\sum n$ *2.* $\sum n^2$ *3.* $\sum n^3$ *4.* $\sum q^n$ *où q désigne un réel fixé.*

1. $S_p = \dfrac{p(p+1)}{2}$ *2.* $S_p = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^4 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)^4 = \sum_{k=0}^{p} \left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$$

D'où, par linéarité de la somme et après simplification de l'égalité :

$$(p+1)^4 = 4S_p + 6\sum_{k=0}^{p} k^2 + 4\sum_{k=0}^{p} k + p + 1$$

On en déduit :

$$4S_p = (p+1)^4 - p(p+1)(2p+1) - 2p(p+1) - (p+1)$$

et donc enfin :

$$\begin{aligned} S_p &= \frac{p+1}{4}\Big((p+1)^3 - p(2p+1) - 2p - 1\Big) \\ &= \frac{(p+1)^2}{4}\Big((p+1)^2 - (2p+1)\Big) \\ S_p &= \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Remarque : On observe que la somme des premiers cubes est le carré de la somme des premiers entiers.

Autre idée de démonstration :

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} \times 4k = k^3$$

Puis simplification télescopique de la somme S_p.

Où l'on remarque que la suite définissant une série est la suite des différences des termes successifs de la série.

4. *Si $q = 1$ alors $S_p = p + 1$, sinon :* $S_p = \dfrac{1 - q^{p+1}}{1 - q} = \dfrac{q^{p+1} - 1}{q - 1}$.

La définition qui suit donne un sens aux **sommes infinies** comme **limite** de sommes finie :

Définition 2 (Convergence des séries)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum u_n$ est dite **convergente** *lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.*

- *En ce cas, la* **somme de la série** *est la limite des sommes partielles. On note*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- *Dans le cas contraire, on dit que la série est* **divergente**.
- *Lorsque la suite des sommes partielles est divergente vers $\pm\infty$, on dit que la série est* **divergente vers** $\pm\infty$.
- *Déterminer* **la nature** *de la série $\sum u_n$, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.*

Remarque : Une série étant convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente, tous les théorèmes sur les suites peuvent se traduire en des énoncés sur les séries. Il suffit d'appliquer ces résultats à la suite des sommes partielles.

Exercice 2 (Un premier exemple de référence)
Considérons la série : $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

1. *Montrer que la suite des sommes partielles de cette série est majorée.*
Indication : On pourra commencer par remarquer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. *En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.*

Exercice 3 (Convergence de la série harmonique alternée)
Considérons la série dite **série harmonique alternée** *:* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ *la somme partielle de rang* n *de cette série.*

1. *Démontrez que les suites extraites* $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont adjacentes.*

   Rappel : deux suites sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante et l'autre décroissante, et que leur différence tend vers 0. *Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.*

   Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$ *:*

   $$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$$

   et

   $$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0$$

   et aussi :

   $$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \to 0$$

   On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont respectivement décroissante et croissante, et que leur différence tend vers* 0. *Ce sont donc, par définition, des suites adjacentes.*

2. *En déduire que la série harmonique alternée est convergente.*
   Les suites adjacentes sont convergentes de même limite, donc la suite (S_n) *des sommes partielles est convergente, d'après le théorème de complémentarité (Chapitre 9 §3.4 Proposition 7).*
   La série harmonique alternée est donc convergente.

Proposition - Définition 1 (Restes d'une série convergente)
Soit $\sum u_n$ *une série* ***convergente****.*

On définit pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ **le reste d'ordre** p *de la série* $\sum u_n$ *par :* $\quad R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$

de sorte que : $\qquad \forall p \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p.$

La suite $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est* ***convergente de limite nulle****.*

Remarque : En d'autres termes, si $\sum u_n$ est une série convergente, de somme S, S_p est une approximation de S à R_p près. Il sera donc particulièrement utile de connaître une estimation du reste, aussi fine que possible.

Exercice 4 (Estimation du reste de la série harmonique alternée)
Reprenons la série harmonique alternée définie précédemment.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On note R_p **le reste d'ordre** *p de cette série convergente.*

1. *Démontrez que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $|R_p| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.*

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ la somme de la série harmonique alternée.

   D'après le théorème sur les suites adjacentes :

   $$S_{2k+1} \leqslant S \leqslant S_{2k} \quad \text{soit} \quad S_{2k+1} - S_{2k} \leqslant R_{2k} \leqslant 0 \quad \text{d'où} \quad |R_{2k}| \leqslant \frac{1}{2k+1}$$

   de même :

   $$S_{2k-1} \leqslant S \leqslant S_{2k} \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant R_{2k-1} \leqslant S_{2k} - S_{2k-1} \quad \text{d'où} \quad |R_{2k-1}| \leqslant \frac{1}{2k}$$

   On en conclut que quel que soit l'entier naturel non nul p on a : $|R_p| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.

2. *Comment suffit-il de choisir l'entier p pour que S_p soit une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-3} près ?*

   On sait que le reste de rang p d'une série convergente donne l'erreur quand on approxime une suite par sa somme partielle de rang p. Dès lors il suffit d'avoir :

   $$\frac{1}{p+1} \leqslant 10^{-3} \quad \text{c'est à dire :} \quad p \geqslant 999$$

   Il suffit donc de choisir par exemple $p = 999$.

Théorème 1 (Opérations sur les séries)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. ***Multiplication par un scalaire :*** *$\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont même nature.*
2. ***Somme :*** *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et*

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

   Si la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
3. ***Parties réelle et imaginaire :*** *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.*

Théorème 2 (Condition nécessaire de convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si *$\sum u_n$ converge* ***alors*** *(u_n) est convergente de limite nulle.*

Définition 3 (Divergence grossière)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** *lorsque* (u_n) *n'admet pas 0 pour limite.*

Exercice 5 (Divergence de la série harmonique)
Considérons la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *appelée* **série harmonique**, *et notons, pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, S_p *la somme partielle de rang* p *de cette série.*

1. *Prouvez pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'inégalité :* $\quad S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que la série harmonique est divergente. Est-elle grossièrement divergente ?*

Théorème 3
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, *la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *converge et :* $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Considérons

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{tz} \end{array}$$

f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z^n \mathrm{e}^{tz} \end{array}$$

Alors, par l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{n=0}^{N} z^n \frac{(1-0)^n}{n!} \right| \leqslant \frac{1(1-0)^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \left(|z^{N+1} \mathrm{e}^{tz}| \right)$$

ie

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \left(|z^{N+1} \mathrm{e}^{tz}| \right)$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. On a :

$$|\mathrm{e}^{tz}| = |\mathrm{e}^{t(a+ib)}| = |\mathrm{e}^{ta}||\mathrm{e}^{itb}| = \mathrm{e}^{ta}$$

Ainsi

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \left(\mathrm{e}^{ta} \right)$$

or

$$\sup_{t \in [0,1]} \left(\mathrm{e}^{ta} \right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^a \text{ si } a > 0 \end{cases} = \max\{1, \mathrm{e}^a\}$$

On obtient

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \max\{1, \mathrm{e}^a\}$$

Par croissances comparées, $\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \longrightarrow 0$, ce qui permet de conclure. □

2 Séries à termes positifs

Dans cette section nous nous intéressons au cas particulier de référence des séries dont le terme général u_n est un réel positif :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$$

Comme la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, les résultats de cette partie s'adaptent aux séries numériques dont le terme général est positif ***à partir d'un certain rang***. Puisque la nature d'une série est inchangée par multiplication par un scalaire, les résultats de cette partie s'adaptent aux séries numériques dont le terme général est négatif ***à partir d'un certain rang***.

Théorème 4 (Théorème de la limite monotone adapté aux séries)
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On note* (S_n) *la suite des sommes partielles :*

$$\text{La suite } (S_n) \text{ est croissante.}$$

$$\sum u_n \text{ est convergente si et seulement si } (S_n) \text{ est majorée.}$$

- *En cas de convergence :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.
- *En cas de divergence, la suite* (S_n) *diverge vers* $+\infty$*, on note :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 5 (Comparaison par des inégalités)
Soit $(u,v) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ *deux suites réelles à termes positifs.*
On suppose de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

- *Si la série* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge aussi et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- *Si la série* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Théorème 6 (Comparaison par des équivalents)
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose que :* $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature (l'une converge si et seulement si l'autre converge).*

Comparaison série-intégrale

Proposition 1 (Comparaison série/intégrale)
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue, positive et décroissante.*
Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ *converge si et seulement si la suite* $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Théorème 7 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$*. Alors la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$*.*
Ces séries sont appelées **séries de Riemann***, et le cas particulier où* $\alpha = 1$*, donc la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$*, est appelé* **série harmonique***.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
Si $\alpha \neq 1$ alors :

$$I_n(\alpha) = \int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

Si $\alpha > 1$ alors $n^{1-\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \to 0$ par quotient.
La suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc par somme et produit.

A l'inverse, si $\alpha < 1$ alors $n^{1-\alpha} \to +\infty$.
La suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge donc par somme et produit.

Enfin

$$I_n(1) = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) \to +\infty$$

La comparaison série/intégrale permet de conclure. □

On veillera à ne pas confondre les **sommes** de Riemann et les **séries** de Riemann.

Remarque : **Lien suite-série**
On peut ramener l'étude d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, à l'étude d'une série en procédant de la manière suivante :
Posons pour, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = a_n - a_{n-1}$.
On vérifie par télescopage que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = a_n - a_0$.
De sorte que la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes et le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

3 Séries absolument convergentes

Définition 4 (Absolue convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$*.*

On dit que $\sum u_n$ *est* **absolument convergente** *lorsque la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Les techniques développées au paragraphe précédent ne s'appliquent qu'aux séries à termes réels positifs. La convergence absolue permet de ramener l'étude de la nature d'une série à termes quelconques (complexes ou de signe non constant) à celle d'une série à termes positifs.

Théorème 8 (Condition suffisante de convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

Dans ce cas : $$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.

- Supposons $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \leqslant 0 \\ u_n & \text{si } u_n > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ -u_n & \text{si } u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

  Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum |u_n|$ converge, on déduit que $\sum u_n^-$ et $\sum u_n^+$ convergent.
  Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = u_n^+ - u_n^-$$
  On en déduit, d'après 1 que $\sum u_n$ converge.
- Supposons $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$, or la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ est convergente, donc $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ est absolument convergente, donc convergente d'après le premier point. De même $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ est convergente donc $\sum u_n$ converge
- Soit $p \in \mathbb{N}$, on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=0}^{p} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{p} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

□

Définition 5 (Semi-convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la série $\sum u_n$ est **semi-convergente** *lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.*

Théorème 9 (Convergence absolue par domination)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à termes positifs.
Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

Remarque : Nous savons que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. Ainsi, le théorème de comparaison par domination est souvent utilisé avec des petits o sans revenir à des grands O.

Démonstration. Supposons $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Il existe un réel positif M et un rang n_0 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant n_0 \implies \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M\right)$$

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est à termes positifs, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$$

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum v_n$ converge, on déduit que $\sum u_n$ converge absolument. □

$\sim$