Table des matières

Chapitre 26

Espaces préhilbertiens réels

Connaître, ce n'est point démontrer, ni expliquer. C'est accéder à la vision.
Mais, pour voir, il convient d'abord de participer.
ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY dans *Pilote de guerre (1942)*

Dans tout le chapitre, en l'absence de précision, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.

1 Produit scalaire et norme associée

Définition 1 (Produit scalaire)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
L'application φ est dite :

- **symétrique**, *lorsqu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;*
- **positive**, *lorsqu'elle vérifie pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$;*
- **définie**, *lorsqu'elle vérifie pour tout $x \in E$, $(\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E)$ (propriété de séparation).*

Un **produit scalaire** *sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur E.*

Remarques :

- Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, on a, pour tout $x \in E$, $\varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, x) = 0$. En particulier, $\varphi(0_E, 0_E) = 0$.
- La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.

Notation
Si φ est un produit scalaire sur E et $(x, y) \in E^2$, on notera souvent $\varphi(x, y)$ sous la forme $\langle x, y \rangle$, $(x \mid y)$ ou plus rarement $x \cdot y$.

Produits scalaires de référence

Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:

Étant donné deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

- Cette application est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
- Par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$, on vérifie que cette application est linéaire par rapport à sa première variable, et par symétrie on en déduit qu'elle est bilinéaire.
- Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0.$$

- De plus, si $(x \mid x) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, d'où $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

Étant donné $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times p$, on définit

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^\intercal \times B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j} = (B \mid A)$$

- Cette application est symétrique car pour tout $(A, B) \in (\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$,

$$(B \mid A) = \mathrm{tr}(B^\intercal A) = \mathrm{tr}((B^\intercal A)^\intercal) = \mathrm{tr}(A^\intercal B) = (A \mid B)$$

- Cette application est linéaire à gauche par linéarité de la trace et de la transposition (et distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).
  Par symétrie, elle est bilinéaire.
- Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$(A \mid A) = \mathrm{tr}(A^\intercal A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2 \geqslant 0.$$

- De plus, si $(A \mid A) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2 = 0$ donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j} = 0$, donc $A = 0_{\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$.

Produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.

Étant donné f et g deux fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on définit

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Cette application est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
- Elle est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale (et distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$). Par symétrie, elle est bilinéaire.
- Si $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors f^2 est une fonction positive donc $(f \mid f)\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
- De plus, si $(f \mid f)=0$, alors $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t=0$. Puisque f^2 est positive et continue sur $[a,b]$, d'après le *théorème 5 du chapitre 19 : Nullité avec signe constant*, cela entraîne la nullité de f^2 donc de f sur le segment $[a,b]$.

Définition 2 (Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens)

- *Un espace* **préhilbertien réel** *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
- *Un espace* **euclidien** *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Exemples 1

Munis des produits scalaires définis ci-dessus, $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces euclidiens.
Muni du produit scalaire précédent, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien réel.

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.
Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :

$$(x \mid y)^2 \leqslant (x \mid x)\times(y \mid y)\,.$$

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si (x,y) est liée.

Démonstration. Soit $(x,y)\in E^2$.
Si $y=0_E$ il y a égalité, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$(x+\lambda y \mid x+\lambda y) = (x \mid x) + 2\lambda\,(x \mid y) + \lambda^2\,(y \mid y)$$

Or on sait par positivité du produit scalaire que $(x+\lambda y \mid x+\lambda y)\geqslant 0$.
Ainsi la fonction polynomiale du second degré $\lambda\mapsto\lambda^2\,(y \mid y)+2\lambda\,(x \mid y)+(x \mid x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, l'équation (d'inconnue λ) $(x \mid x)+2\lambda\,(x \mid y)+\lambda^2\,(y \mid y)=0$ admet au maximum une solution réelle : en particulier, le discriminant de cette équation est négatif ou nul, ce qui donne

$$4\,(x \mid y)^2 - 4\,(x \mid x)\,(y \mid y)\leqslant 0$$

qui est équivalent à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, s'il y a égalité, alors le discriminant est nul, ce qui entraîne l'existence d'une racine réelle (double) pour l'équation polynomiale

précédente.
En notant λ_0 cette racine, on a alors $(x+\lambda_0 y \mid x+\lambda_0 y)=0$. Par le caractère défini du produit scalaire, c'est équivalent à $x+\lambda_0 y=0_E$. Ainsi, (x,y) est liée.
Réciproquement, on vérifie facilement que si (x,y) est liée l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité. □

Proposition 1 (Inégalité de Minkowski)
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a :

$$\sqrt{(x+y \mid x+y)} \leqslant \sqrt{(x \mid x)}+\sqrt{(y \mid y)}$$

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si (x,y) est positivement liée.

Démonstration. Soit $(x,y)\in E^2$. Par positivité, bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\sqrt{(x+y \mid x+y)}^2=(x+y \mid x+y)=(x \mid x)+2\,(x \mid y)+(y \mid y)$$

et

$$\left(\sqrt{(x \mid x)}+\sqrt{(y \mid y)}\right)^2=(x \mid x)+2\sqrt{(x \mid x)}\sqrt{(y \mid y)}+(y \mid y)$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|(x \mid y)|\leqslant\sqrt{(x \mid x)}\sqrt{(y \mid y)}$, donc $\sqrt{(x+y \mid x+y)}^2\leqslant\left(\sqrt{(x \mid x)}+\sqrt{(y \mid y)}\right)^2$.
Par positivité du produit scalaire, on en déduit bien l'inégalité de Minkowski.
De plus, s'il y a égalité dans l'inégalité de Minkowski, alors il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc (x,y) est liée.
Supposons sans perte de généralité qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda y$.
Alors $2\,(x \mid y)=2\lambda\,(y \mid y)=2\sqrt{(x \mid x)}\sqrt{(y \mid y)}=2|\lambda|\,(y \mid y)$.
Si $y\neq 0_E$, on en déduit que $\lambda=|\lambda|$, donc $\lambda\geqslant 0$, et (x,y) sont positivement liés.
Cela reste vrai si $y=0_E$.
Réciproquement, on constate que si (x,y) est positivement liée, il y a égalité dans l'inégalité. □

Définition 3 (Norme associée à un produit scalaire)
Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. L'application

$$\|\cdot\| : x\in E\mapsto\|x\|=\sqrt{(x \mid x)}$$

est appelée **norme euclidienne** *associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.*
En particulier, pour tout $x\in E$, $(x \mid x)=\|x\|^2$.
On appelle alors **norme du vecteur** *x le réel positif $\|x\|=\sqrt{(x \mid x)}$*

Proposition 2 (Propriétés de la norme)
Soit E un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. Alors :

1. ***Homogénéité :*** $\forall x\in E,\forall\lambda\in\mathbb{R},\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$.
2. ***Séparation :*** $\forall x\in E,\|x\|=0\iff x=0_E$.

3. ***Inégalité triangulaire :*** $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$ ou s'il existe $\lambda > 0$ tel que $y = \lambda x$.

Remarque : Plus généralement, ces propriétés définissent ce qu'on appelle une ***norme***, objet que vous étudierez en 2ème année.

Démonstration.

- ***Homogénéité :*** soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité du produit scalaire,
$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x \mid x)} = |\lambda|\|x\|.$$
- ***Séparation :*** soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$. Alors, $(x \mid x) = 0$ donc par le caractère défini du produit scalaire, on en déduit que $x = 0_E$.
- ***Inégalité triangulaire :*** c'est l'inégalité de Minkowski.

□

Exemple 1
La norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4 (Vecteur unitaire)
On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** *lorsque sa norme $\|x\|$ vaut 1.*

Remarque : Si $x \in E$ n'est pas le vecteur nul, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{1}{\|x\|}x$ est un vecteur unitaire.

Proposition 3 (Reformulations en termes de norme)
Soit E un espace préhilbertien réel, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

- *L'inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.
- *L'inégalité (triangulaire) de Minkowski :* $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Si à tout produit scalaire est associé une norme, la réciproque n'est pas vraie, et il existe des normes non associées à des produits scalaires.
En revanche, lorsqu'une norme est associée à un produit scalaire, connaître la norme permet de retrouver le produit scalaire, grâce à l'identité de polarisation ci-dessous

Proposition 4 (Identité remarquable et formule de polarisation associée)
Soit E un espace préhilbertien réel et $(x,y) \in E^2$.
On a l'identité remarquable suivante :
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$$
et sa formule de polarisation associée :
$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

Démonstration. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :
$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x \mid y)$$
□

2 Orthogonalité

Définition 5 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel E sont dits **orthogonaux** *lorsque* ***leur produit scalaire est nul****, c'est-à-dire si $(x \mid y) = 0$.*

Remarque : La propriété de séparation énonce que le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui même.
En particulier, seul le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Définition 6 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)
Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace préhilbertien réel E sont dits **orthogonaux***, lorsque les vecteurs de F_1 sont orthogonaux aux vecteurs de F_2, c'est-à-dire si pour tout $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $(x_1 \mid x_2) = 0$.*

Notation
Le symbole $\perp$ est le symbole d'orthogonalité. Ainsi :

- *Si $(x, y) \in E^2$, $x \perp y$ se lit « x et y sont orthogonaux ».*
- *Pour deux sous-espaces F_1 et F_2, $F_1 \perp F_2$ se lit « F_1 et F_2 sont orthogonaux ».*

Exemple 2
Les sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

Théorème 2 (Théorème de Pythagore)
Soit x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. Alors, les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\,(x \mid y)$ donc $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 \iff (x \mid y) = 0$. □

Définition 7 (Famille orthogonale)
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite **orthogonale** *lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, c'est à dire lorsque pour tout $(i, j) \in I^2$, $(i \neq j \implies (x_i \mid x_j) = 0)$.*

Proposition 5 (Généralisation du théorème de Pythagore à une famille)
Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille orthogonale finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On a alors la relation de Pythagore :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Démonstration. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i \mid x_j)\end{aligned}$$

Par orthogonalité de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, les termes de la somme sont nuls si $i \neq j$. Ainsi,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

□

Remarque : Contrairement au cas de deux vecteurs, cette généralisation du théorème de Pythagore n'est pas une équivalence.

Proposition 6 (Liberté d'une famille orthogonale)
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel E est libre.

Démonstration. On prouve le résultat pour une famille finie de vecteurs de E.
Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0_E.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \mid x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,(x_i \mid x_j)$$

Par orthogonalité de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on en déduit que

$$\left(x_j \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) = \lambda_j \|x_j\|^2$$

Mais par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0_E$ donc $(x_j \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i) = 0$. Ainsi, $\lambda_j \|x_j\|^2 = 0$. Comme x_j est non nul, on en déduit que $\lambda_j = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. □

Notation
On rappelle que le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ est défini par $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

Définition 8 (Famille orthonormale ou orthonormée)
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite **orthonormale** *(ou* **orthonormée***) lorsqu'elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire lorsque pour tout $(i, j) \in I^2$, $(x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$.*

Proposition 7
Toute famille orthonormale de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est libre.

Démonstration. Une telle famille est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc elle est libre d'après la proposition précédente. □

Définition 9 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)
On appelle **orthogonal** *d'un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien réel E l'ensemble $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux à F. Autrement dit,*

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x \mid y) = 0\}.$$

Proposition 8 (L'orthogonal d'une partie est un sous-espace)
L'orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien réel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- Pour tout $y \in F$, $(0_E \mid y) = 0$. Ainsi, $0_E \in F^\perp$ donc $F^\perp \neq \emptyset$.
- Soit $(x_1, x_2) \in \left(F^\perp\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda x_1 + x_2 \in F^\perp$.
  Soit $y \in F$. Par linéarité à gauche du produit scalaire,
  $$(\lambda x_1 + x_2 \mid y) = \lambda (x_1 \mid y) + (x_2 \mid y).$$
  Comme $(x_1, x_2) \in \left(F^\perp\right)^2$ et $y \in F$, les deux produits scalaires du terme de droite sont nuls donc $(\lambda x_1 + x_2 \mid y) = 0$.
  Ainsi, $\lambda x_1 + x_2 \in F^\perp$.

$F^\perp$ est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est donc un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition 9
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E. Alors, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, c'est-à-dire que F et son orthogonal sont en somme directe.

Démonstration. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors, $(\underbrace{x}_{\in F} \mid \underbrace{x}_{\in F^\perp}) = 0$. Comme le produit scalaire est défini, on en déduit que $x = 0_E$, donc F et $F^\perp$ sont en somme directe. □

Remarque : Le seul vecteur d'un espace préhilbertien réel E orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, $E^\perp = \{0_E\}$.

⚠ Pour autant, deux sous-espaces orthogonaux ne sont pas forcément supplémentaires dans E.

3 Bases orthonormales d'un espace euclidien

Dans cette section, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 10 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.
On définit par récurrence une famille $(x_1, \dots, x_n)$ en posant

- $x_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$
- $\forall k \in [\![2, n]\!], \quad x_k = \dfrac{x_k^*}{\|x_k^*\|}$ *où* $x_k^* = e_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (e_k \mid x_i)\, x_i$.

Alors :

- *la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormée.*
- $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$

Théorème 3 (Existence de bases orthonormales en dimension finie)
Tout espace euclidien E admet au moins une base orthonormale.

Corollaire 1 (Théorème de la base orthonormée incomplète)
Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille orthonormée de E. Alors elle peut-être complétée en une base orthonormée de E.

Proposition 11 (Expression des coordonnées dans une base orthonormale)
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Alors, les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ de tout vecteur $x \in E$ sont données par, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = (e_i \mid x)$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) e_i.$$

Démonstration. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.
Alors, par linéarité à droite du produit scalaire, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(e_j \mid x) = \left(e_j \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{i,j} = x_j.$$

□

Proposition 12 (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale)
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Pour $(x, y) \in E^2$, dont on note respectivement $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, le produit scalaire de x et y est donné par :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)(e_i \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En particulier, la norme de x est donnée par :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Démonstration. En écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on obtient par bilinéarité du produit scalaire, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(x \mid y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

□

Remarque : Le choix d'une base orthonormée permet de faire les calculs comme avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2 (Traduction matricielle)
En notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$ les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y de E dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, on a

$$(x \mid y) = X^{\mathrm{T}} Y = Y^{\mathrm{T}} X \ \text{ et } \|x\| = \sqrt{X^{\mathrm{T}} X}$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 13 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie)
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de ***dimension finie*** *de E. Alors, les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire que*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

On dit alors que **le** *sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E est* **le** *supplémentaire orthogonal de F.*

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace préhilbertien réel E. Comme F et $F^\perp$ sont en somme directe, pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de montrer que tout vecteur de E se décompose dans la somme $F + F^\perp$. Comme F est de dimension finie, il admet une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit $x \in E$. Montrons que la décomposition suivante convient :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k}_{=y} + \underbrace{\left(x - \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k\right)}_{=z}.$$

Le vecteur y appartient bien à $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Reste à montrer que $z \in F^\perp$. Pour cela, il suffit de vérifier que z est orthogonal à F, c'est-à-dire que z est orthogonal à tout vecteur de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de F.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
(e_j \mid z) &= \left(e_j \;\middle|\; \left(x - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(e_k \mid x)}_{\in \mathbb{R}}\, e_k\right)\right) \\
&= (e_j \mid x) - \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, \underbrace{(e_j \mid e_k)}_{=\delta_{i,j}} \\
&= (e_j \mid x) - (e_j \mid x) = 0
\end{aligned}$$

donc $z \in F^\perp$, d'où l'existence de la décomposition. □

Remarque : Ce résultat n'est plus vrai en général lorsque F est de dimension infinie.

Corollaire 3
Si E est un espace euclidien, tout sous-espace vectoriel F de E admet un unique supplémentaire orthogonal. De plus,

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp).$$

On retrouve le résultat suivant :

Corollaire 4 (Complétion de familles orthonormales)
Dans un espace euclidien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale d'un espace euclidien.
Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $F^\perp$.
Alors $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ forme une base orthonormale de E (qui plus est adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$). □

Définition 10 (Projection orthogonale)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ d'un espace préhilbertien réel E (pas nécessairement de dimension finie). La **projection orthogonale** p_F *sur le sous-espace de dimension finie F d'un espace préhilbertien réel est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Remarque : Comme F est de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$ donc cette définition a bien un sens.

Proposition 14 (Expression des projections orthogonales)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ d'un espace préhilbertien réel E (pas nécessairement de dimension finie).
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, on a

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i.$$

Démonstration. On suppose que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F. Soit $x \in E$.
Notons $x_1 = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$. Le vecteur x_1 appartient à F.
Par unicité de la décomposition dans $F \oplus F^\perp$, pour montrer qu'il s'agit de $p_F(x)$, il suffit de montrer que $x - x_1 \in F^\perp$. Or, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, par bilinéarité du produit scalaire et orthonormalité de la famille $(e_1, \dots, e_p)$,

$$\begin{aligned}(e_j \mid x - x_1) &= (e_j \mid x) - \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\,(e_j \mid e_i) \\ &= (e_j \mid x) - (e_j \mid x)\,(e_j \mid e_j) = 0\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 11 (Distance à un sous-espace vectoriel)
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Soit $x \in E$. La distance de x à F est le réel positif :

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème 4 (Projection orthogonale et distance)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E et $x \in E$. Alors, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F minimisant la distance de x à F. Autrement dit, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y_0 de F tel que :

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = \mathrm{d}(x, F)$$

Remarque : Un élément remarquable de ce théorème est le fait que la distance, qui est a priori une borne inférieure, soit atteinte : c'est un minimum.

Démonstration. Montrons que la distance de x à F est atteinte et qu'elle vaut $\|x - p_F(x)\|$.
Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + 2(\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}) + \|p_F(x) - y\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \\ &\geqslant \|x - p_F(x)\|^2\end{aligned}$$

On déduit, par les propriétés de la borne inférieure, que $d(x,F) \geqslant \|x - p_F(x)\|$.
Or, pour $y = p_F(x) \in F$, cette valeur est bien atteinte : on a égalité.
Finalement, si $\|x - y\| = d(x,F)$ pour un certain $y \in F$, la dernière inégalité ci-dessus est une égalité. On en déduit que $\|p_F(x) - y\| = 0$ d'où $y = p_F(x)$. □

Corollaire 5
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E.

$$\forall x \in E, \ \ (\mathrm{d}(x,F))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Pythagore. □

Théorème 5 (Distance et projection sur un hyperplan)
Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E et u un vecteur normal à E.
Notamment, $H^\perp = \mathrm{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur H est

$$p(x) = x - \frac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u$$

La distance de x à H est

$$d(x,H) = \frac{|(x \mid u)|}{\|u\|}$$

Exemple 3
Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t$

Considérons :
- *l'espace vectoriel E des fonctions continues sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ muni de son produit scalaire de référence ;*
- *le sous-espace vectoriel de $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$;*
- *$x = \mathrm{id}_E$ la fonction identité sur I.*

F est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $\cos$ et $\sin$ (plus précisément, leurs restrictions à l'intervalle $[0, 2\pi]$) :

$$F = \left\{ a\cos + b\sin, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ainsi, par définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel :

$$d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x - y\| = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t}$$

D'où, par croissance et continuité de la fonction carré :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t = d^2(x,F)$$

Calculons ce carré de distance à l'aide du projeté orthogonal de x sur F :

$$d^2(x,F) = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

On a :

$$\|x\|^2 = (x \mid x) = \int_0^{2\pi} t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3$$

Pour déterminer $p_F(x)$ il nous faut une base orthonormale de F.

Calculons :

$$(\cos \mid \sin) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0$$

La base $(\cos, \sin)$ est donc orthogonale.

On a, d'après la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

mais, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t))\,\mathrm{d}t = (\cos \mid \cos) + (\sin \mid \sin)$$

Or via le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ et par périodicité de la fonction $\sin$:

$$(\cos \mid \cos) = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{-3\pi/2} \sin^2(u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u = (\sin \mid \sin)$$

On en conclut : $\quad (\cos \mid \cos) = (\sin \mid \sin) = \pi, \quad$ *soit :* $\quad \|\cos\| = \|\sin\| = \sqrt{\pi}$.

Soit $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2) = \left(\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\right)$ *une base orthonormée de F. Alors :*

$$p_F(x) = (\mathrm{e}_1 \mid x)\mathrm{e}_1 + (\mathrm{e}_2 \mid x)\mathrm{e}_2$$

Avec, par intégration par partie :

$$(\mathrm{e}_1 \mid x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left([t\sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

et

$$(\mathrm{e}_2 \mid x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left([-t\cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = -2\sqrt{\pi}$$

D'où :

$$p_F(x) = -2\sqrt{\pi}e_2 \qquad \text{et donc} \qquad \|p_F(x)\|^2 = 4\pi$$

D'où le carré de la distance de x à F par projection orthogonale :

$$d^2(x, F) = \frac{8}{3}\pi^3 - 4\pi$$

On en déduit :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\pi^3 - 4\pi \approx 70,12$$

Autre méthode
On observe que l'expression à intégrer, après développement, s'écrit sous la forme de termes intégrables. On peut alors calculer cette intégrale en fonction de a et b, puis chercher à minimiser cette quantité selon les valeurs de a et b. On se ramène à chercher le minimum d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 6 (Distance et projection sur un hyperplan)
*Soit E un espace euclidien, H un hyperplan de E, u un vecteur normal à E et $x \in E$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, dans laquelle on écrit*

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

La distance de x à H est ;

$$d(x, H) = \frac{|x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n|}{\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}}$$

$\sim$