Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$:

1. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts : $\Psi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.
2. Pour $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\Phi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

Exercice 2 —
Montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \left(\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f, g) & \longmapsto & f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Exercice 3 —
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$

Deux possibilités : choisir le produit scalaire de référence et bien choisir ses fonctions pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; choisir un produit scalaire défini à l'aide de la fonction f.

Exercice 4 — Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$
Mettre en oeuvre l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire de référence des fonctions continues sur un intervalle.
Les carrés scalaires sont calculables par primitivation.

Exercice 5 —

1. Montrer que $$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \left(\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
   définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :
   $$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 —
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$
On reconnaît en 2^n la somme des coefficients binomiaux de la ligne de rang n du triangle de Pascal.
Penser au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$, et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à deux

vecteurs judicieusement choisis.

Exercice 7 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1, 0, 1), \qquad v = (1, 1, 1), \qquad w = (-1, 1, 0).$$

Exercice 8 — Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 1)$ et $(1, 2, -1)$

1. Donner une équation de F.
2. Déterminer une base de l'orthogonal de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $(1, 1, 1)$ sur F.

Exercice 9 — Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur le plan F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

On se souvient que la matrice d'une application linéaire est composée des vecteurs colonne des images des vecteurs de la base de départ décomposés dans la base des vecteurs d'arrivée.
Dans ce cas la base de départ est la base d'arrivée : la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
Il suffit donc de déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 sur le plan F.
Il nous faut une base de F. On peut, par exemple, exprimer z et t en fonction de x et y, et écrire F comme un Vect, ou alors plus simplement trouver deux vecteurs non colinéaires de F.
On peut ensuite orthonormaliser cette base, et à l'aide de l'expression des projections orthogonales, déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs de la base canonique sur F.

Exercice 10 — On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z + t = x - y + z - t = 0\Big\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que toute famille orthonormée de n vecteurs de E forme une base de E.

Exercice 12 —
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $(. \mid .)$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 0, -2,), (1, 1, 1))$ muni du produit scalaire canonique.

2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
   Une stratégie possible est de partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et de mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

3. $E = M_2(\mathbb{R})$, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $(A \mid B) = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$

4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique.
   Mettre en oeuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X^2+1, X^3+1)$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 — Le passage à l'orthogonal renverse les inclusions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.
Montrer que si $F \subset G$, alors on a $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 14 — Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 15 — Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.
Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

$\sim$