Exercice 1 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{3^n}$
2. $\sum \frac{5^n}{6^n}$
3. $\sum \frac{2^n+3^n}{6^n}$
4. $\sum \frac{3}{4^n}$
5. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$
6. $\sum \frac{3^{n-1}}{4^{n+2}}$

Exercice 2 — Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum \frac{1}{n^2-1}$
2. $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cherchons trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Par identification des coefficients du numérateur on a le système :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et le terme de rang N de la suite des sommes partielles de la série :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

or $\quad \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{N+1} \quad$ et $\quad \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$

D'où, après simplification du terme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ qui apparaît avec le coefficient 0 :

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right)$$

On en conclut, par limite de somme, quotient et produit :

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Rappelons à toutes fins utiles que la flèche signifie : « l'expression de gauche admet une limite et cette limite vaut l'expression de droite ».
La précision « $N \to +\infty$ » sous la flèche peut être omise ici car il n'y a pas d'ambiguïté, mais si les choses vont sans dire, elle vont parfois mieux en le disant.

La série converge donc et a pour somme $\frac{1}{4}$.

3. $\sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons deux réels a et b tels que :

$$\frac{5}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3} = \frac{(2a+2b)n + 3a + b}{(2n+1)(2n+3)}$$

Par identification des coefficients du numérateur on a le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=5 \end{cases} \iff a = -b = \frac{5}{2}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et le terme de rang N de la suite des sommes partielles de la série :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{5}{2(2n+1)} - \frac{5}{2(2n+3)} \right) \\ &= \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{5}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+3} \right) \end{aligned}$$

On en conclut, par limite de produit, somme et quotient : $\qquad S_N \to \frac{5}{2}$.
La série converge donc et a pour somme $\frac{5}{2}$.

4. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et le terme de rang N de la suite des sommes partielles de la série :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) \end{aligned}$$

Or, pour $p \in \{1,2,3\}$: $\qquad \prod_{n=1}^{N}(n+p) = \frac{(N+p)!}{p!}$.
D'où :

$$S_N = \ln\left(\frac{3!(N+1)!(N+2)!}{1!2!N!(N+3)!} \right) = \ln\left(\frac{3(N+1)}{N+3} \right) \sim \ln(3)$$

On en conclut que la série converge et a pour somme $\ln(3)$.

5. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

En raison de l'ensemble de définition des fonctions inverse et logarithme népérien, le terme général de la série n'est pas défini pour $n \in \{0,1\}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![: \qquad 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.

Soit $N \in [\![2,+\infty]\!]$ et le terme de rang N de la suite des sommes partielles de la série :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) \\ &= \ln\left(\frac{2^2(N!)^2(N+1)}{N(N!)^2} \right) \end{aligned}$$

Or, pour $p \in \{1,2,3\}$: $\qquad \prod_{n=1}^{N}(n+p) = \frac{(N+p)!}{p!}$.
D'où :

$$S_N = \ln\left(\frac{3!(N+1)!(N+2)!}{1!2!N!(N+3)!} \right) = \ln\left(\frac{3(N+1)}{N+3} \right) \sim \ln(3)$$

On en conclut que la série converge et a pour somme $\ln(3)$.

6. $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
7. $\sum \frac{1}{n^2-4}$

Exercice 3 — Préciser la nature des séries suivantes

1. $\sum \frac{3^n}{4^n+1}$
2. $\sum \frac{n^2}{n!}$

Soit $n \in [\![4,+\infty[\![$. On a :

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} \times \frac{n}{n-1} \sim \frac{1}{(n-2)!}$$

Or $\forall k \in [\![2, n-2]\!], \quad k \leqslant 2$ donc par produit :

$$(n-2)! \geqslant 2^{n-3} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{(n-2)!} \leqslant \frac{1}{2^{n-3}}$$

Ainsi, à partir du rang 4, le terme général de la série est majoré par une suite géométrique dont les sommes partielles convergent. La série est donc convergente.

3. $\sum \frac{\mathrm{e}^{-2n}+n}{n^3+2}$
4. $\sum \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
5. $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$
6. $\sum \frac{n}{(\ln(n))^n}$
7. $\sum \frac{(\ln(n))^n}{n^3}$
8. $\sum \frac{2^n}{n^2}$
9. $\sum \frac{n(n-1)}{6^n}$
10. $\sum \frac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$
11. $\sum \frac{1}{\ln(n)}$
12. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
13. $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
14. $\sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
15. $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$
16. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
17. $\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
18. $\sum \frac{1}{(\ln(n))^n}$
19. $\sum \frac{(\ln(n))^3}{n^2}$
20. $\sum n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
21. $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
22. $\sum \frac{\sin^4(n)}{n^2+\cos(n^{10})}$
23. $\sum \frac{1}{(\ln(n))^2}$
24. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
25. $\sum \frac{2^n+\sin(n)}{n!}$
26. $\sum \frac{2\ln(n)+\sqrt{n}}{n^2+3n+2}$
27. $\sum \ln\left(\frac{n+5}{n+1}\right)$
28. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

On a : $\qquad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad$ et $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \sim 1$.
Donc le terme général de la série est équivalent à celui d'une série de Riemann divergente.
La série est par conséquent divergente.

29. $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$
30. $\sum \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$
31. $\sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)^n$
32. $\sum \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+n^3)}$
33. $\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$
34. $\sum \frac{1}{\ln(\mathrm{ch}(n))}$
35. $\sum \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
36. $\sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n}$

Exercice 4 — Préciser la nature des séries de terme général :

1. $u_n = n + \frac{1}{2} - \sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}$
2. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
4. $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
5. $u_n = \left(\ln(n^2+1) - \ln(n^2)\right)^n$
6. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^n) - n$
8. $u_n = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^2}$
9. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{\mathrm{e}}$

Exercice 5 — Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n+1}}$

Pour tout entier naturel n on a : $\qquad \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

La série est donc une série géométrique convergente de limite :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$

2. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ avec $x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. On a :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$$

Soit $N \in [\![2,+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} &= \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) \\ &= \ln(1) - \ln(N) - \ln(2) + \ln(N+1) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \to -\ln(2) \end{aligned}$$

4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{3^n}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3+n2^n}{4^{n+2}}$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4(-1)^n}{n!}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$
9. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
10. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Exercice 6 — Série Harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
L'objectif de cet exercice est de démontrer par comparaison à des intégrales que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et de donner un équivalent de H_n.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$. Alors, par décroissance de la fonction inverse sur cet intervalle :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

D'où, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$.

En sommant terme à terme les inégalités de la question **1.** pour $k \in [\![1, n]\!]$ on obtient, après avoir fait usage de la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

On en déduit, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement :

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

La suite H est minorée par la suite $(\ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui diverge vers $+\infty$.
Donc, d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$$

4. Prouver $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$. L'encadrement de la question **2.** fournit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}$$

Or

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

donc $\quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to 1 \qquad$ par limite de quotient et de somme.

On obtient donc, par limite de quotient et de somme, un encadrement de la suite $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\in[\![2,+\infty]\!]}$ par deux suites convergentes de limite 1.
Le théorème d'encadrement fournit : $\qquad \frac{H_n}{\ln(n)} \to 1$.

Donc, d'après la caractérisation de l'équivalence par les quotients : $\quad H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 7 —

1. Justifier de la convergence de $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 8 — Séries de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln(n)^\beta)}$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Si $\beta \geqslant 0$, alors u_n est dominé par la série de Bertrand de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ qui est convergente.

Si $\beta < 0$, soit $\gamma \in]0, \alpha-1[$. Alors :

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}} \times \frac{\ln(n)^{-\beta}}{n^\gamma}$$

alors u_n est dominé par la série de Bertrand de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}$ qui est convergente.

2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
3. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ suivant la valeur de β à l'aide d'une comparaison à une intégrale.

$\sim$