Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$:

1. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts : $\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.

2. Pour $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

Exercice 2 —
Montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \left(\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Exercice 3 —
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$

Si f est la fonction uniformément nulle, l'inégalité est une égalité triviale.
Supposons pour la suite que f n'est pas la fonction nulle.

Soit $E = \mathscr{C}[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$.
On montre sans soucis que l'application φ définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(g,h) = \int_0^1 g(t)h(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\varphi(\mathrm{id}^n, \mathrm{id}^p))^2 \leqslant (\varphi(\mathrm{id}^n, \mathrm{id}^n))^2 \times (\varphi(\mathrm{id}^p, \mathrm{id}^p))^2$$

c'est à dire :

$$I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$$

Exercice 4 — Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons le produit scalaire de référence des fonctions continues sur un intervalle :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit f et g les fonctions définies sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Ces fonctions sont continues, et la famille (f, g) est libre. Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

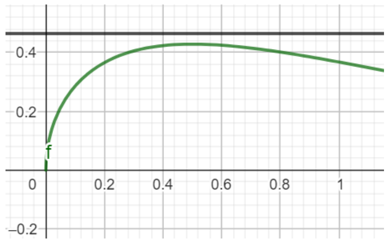
$$(f \mid g)^2 < (f \mid f) \times (g \mid g)$$

avec

$$(f \mid f)\times(g \mid g) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \times \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-1)\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{4}$$

On obtient donc, en appliquant la fonction racine carrée à chaque membre de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$$



Exercice 5 —

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \left(\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \left(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\right)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
2. Soit $f\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)=0$. Montrer que :
$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 —

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$

Considérons le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux vecteurs

$$\left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)_{k\in[\![0,n]\!]} \qquad \text{et} \qquad (1,\ldots,1) :$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\sum_{k=0}^{n}1^2 = 2^n(n+1)$$

$$\iff \qquad \sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$$

Exercice 7 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u,v,w) avec

$$u=(1,0,1), \qquad v=(1,1,1), \qquad w=(-1,1,0).$$

On a : $\|u\|=\sqrt{2}$. Posons $\boxed{x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}u}$.

Soit $y^* = v - (v \mid x)x$ avec :

$$(v \mid x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v \mid u) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

Donc $y^* = v - \sqrt{2}x = v - u = (0,1,0)$. Posons $y = (0,1,0)$.

Soit $z^* = w - (w \mid x)x - (w \mid y)y$.

Calculons : $\|y^*\|^2 = 2(1-\sqrt{2})^2 + 1$

Exercice 8 — Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,1)$ et $(1,2,-1)$

1. Donner une équation de F.

On a :

$F = \text{Vect}\,(1,0,1),(1,2,-1) = \left\{a(1,0,1)+b(1,2,-1), (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(a+b, 2b, a-b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Ainsi,

$$(x,y,z) \in F \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = a+b \\ y = 2b \\ z = a-b \end{cases} \iff x - z = y$$

F est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (un hyperplan) d'équation :

$$x - y - z = 0$$

2. Déterminer une base de l'orthogonal de F.

F est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ donc son orthogonal est de dimension 1. On sait que le vecteur normal au plan d'équation $ax+by+cz=0$ est $\vec{n} = (a,b,c)$ donc :

$$F^\perp = \text{Vect}\,((1,-1,-1))$$

<u>Autre méthode</u> : On pouvait aussi, plus basiquement, déterminer les vecteurs (x,y,z) tels que

$$(n \mid (1,0,1)) = (n \mid (1,2,-1)) = 0$$

qui conduit à $\text{Vect}\,((1,-1,-1))$.

3. Déterminer le projeté orthogonal de $(1,1,1)$ sur F.

Nommons les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (1,2,-1)$, $n = (1,-1,-1)$.
La famille (u,v,n) est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Considérons la décomposition du vecteur $(1,1,1)$ dans cette base en définissant trois réels x, y et z tels que :

$$(1,1,1) = xu + yv + zn \iff \begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Le projeté orthogonal de $(1,1,1)$ sur F est donc le vecteur :

$$(1,0,1)+\frac{1}{3}(1,2,-1)=\boxed{\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$$

Autre méthode : Construire une base orthonormale de F, et utiliser l'expression des projections orthogonales (proposition 14)

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (même si dans ce cas il suffit d'une normalisation, utilisons cette occasion pour s'entraîner à la mise en oeuvre de l'algorithme).

Soit $x_1=\dfrac{u}{\|u\|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$.
Soit $x_2^*=v+(v\mid x_1)x_1=v$ *(les vecteurs u et v étaient déjà orthogonaux).*
et $x_2=\dfrac{x_2^*}{\|x_2^*\|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,2,-1)$.
La famille (x_1,x_2) est une base orthonormée de F.

Alors le projeté orthogonal de $x=(1,1,1)$ sur F est :

$$p=(x\mid x_1)x_1+(x\mid x_2)x_2=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}(1,2,-1)=\boxed{\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$$

Exercice 9 — Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur le plan F d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z=0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=-x-y-z=-3y \\ z=-x+2y \end{cases}$$

Donc

$$F=\left\{(x,y,-x+2y,-3y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\left((1,0,-1,0),(0,1,2,-3)\right)$$

Autre méthode : F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 contenant les vecteurs non colinéaires $(1,1,1,-3)$ et $(1,0,-1,0)$.
Ces deux vecteurs ont le bon goût d'être orthogonaux, donc la famille (x_1,x_2) avec

$$x_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)\qquad \textit{et}\qquad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$$

est une base orthonormale de F.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$p(e_1) = (e_1 \mid x_1)x_1 + (e_1 \mid x_2)x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \frac{1}{6}(1,1,1,-3) + \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$p(e_2) = (e_2 \mid x_1)x_1 + (e_2 \mid x_2)x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_1 + 0\,x_2 = \frac{1}{6}(1,1,1,-3)$$
$$p(e_3) = (e_3 \mid x_1)x_1 + (e_3 \mid x_2)x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \frac{1}{6}(1,1,1,-3) - \frac{1}{2}(1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$p(e_4) = (e_4 \mid x_1)x_1 + (e_4 \mid x_2)x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 = -\frac{1}{4}(1,1,1,-3)$$

On en déduit :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & -1/2 \\ 4 & 1 & -2 & -1/2 \\ -3 & -3 & -3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Construisons une base orthonormée de F : ...

Exercice 10 — On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x + y + z + t = x - y + z - t = 0\right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que toute famille orthonormée de n vecteurs de E forme une base de E.

Exercice 12 —
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $(.\mid.)$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0, -2,), (1, 1, 1))$ muni du produit scalaire canonique.
2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

   Soit $e_1 = 1_{\mathbb{R}[X]}$, $e_2 = X$ et $e_3 = X^2$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Calculons : $\quad \|e_1\| = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2}.$

   Posons $\boxed{x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots\right)}$.

   Soit $\quad x_2^* = e_2 - (e_2 \mid x_1)x_1 = X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X \mid 1) = X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = X.$

   Calculons : $\quad \|x_2^*\| = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

Posons $\boxed{x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X}$.

Soit $x_3^* = e_3 - (e_3 \mid x_1)x_1 - (e_3 \mid x_2)x_2 = X^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X^2 \mid 1) \times 1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}(X^2 \mid X)X.$

On a : $(X^2 \mid 1) = \dfrac{2}{3}$ et $(X^2 \mid X) = 0.$

Donc $x_3^* = X^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

Calculons : $\|x_3^*\| = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \mathrm{d}t} = ...$

3. $E = M_2(\mathbb{R})$, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $(A \mid B) = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$

4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique.

Soit $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,1,0,1)$ et $e_3 = (2,0,1,1)$.

Soit trois réels α, β, γ tels que : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$.
...
la famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre.

Calculons : $\|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$ Posons $\boxed{x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)}$.

Soit $x_2^* = e_2 - (e_2 \mid x_1)x_1 = ...$

Calculons : $\|x_2^*\| = ...$ Posons $x_2 = \dfrac{x_2^*}{\|x_2^*\|}...$

Soit $x_3^* = e_3 - (e_3 \mid x_1)x_1 - (e_3 \mid x_2)x_2 = ...$

...

5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X^2+1, X^3+1)$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 13 — Le passage à l'orthogonal renverse les inclusions
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.
Montrer que si $F \subset G$, alors on a $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 14 — Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 15 — Inégalité de Bessel
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.
Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

$\sim$