

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$:

1. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts : $\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$.
2. Pour $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

Exercice 2 —

Montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \end{aligned}$$

Exercice 3 —

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \int_0^1 t^k f(t) dt$.

Montrer : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$

Exercice 4 — Montrer que : $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx < \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$

Exercice 5 —

1. Montrer que $\varphi : (\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(f, g) \longmapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt - \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^1 f(t)f''(t) dt$$

Exercice 6 —

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$

Exercice 7 — Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, 1, 0).$$

Exercice 8 — Soit F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par $(1, 0, 1)$ et $(1, 2, -1)$

1. Donner une équation de F .
2. Déterminer une base de l'orthogonal de F .
3. Déterminer le projeté orthogonal de $(1, 1, 1)$ sur F .

Exercice 9 — Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 , muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p sur le plan F d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & -1/2 \\ 4 & 1 & -2 & -1/2 \\ -3 & -3 & -3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 — On considère \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = x - y + z - t = 0 \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F .
2. Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F .
3. Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la symétrie orthogonale par rapport à F .
4. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que toute famille orthonormée de n vecteurs de E forme une base de E .

Exercice 12 —

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E , muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 0, -2), (1, 1, 1))$ muni du produit scalaire canonique.
2. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.
3. $E = M_2(\mathbb{R})$, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $(A | B) = \text{tr}({}^tAB)$
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique.
5. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \text{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1)$, $(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Exercice 13 — Le passage à l'orthogonal reverse les inclusions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E .

Montrer que si $F \subset G$, alors on a $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 14 — Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 15 — Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On note p_F la projection orthogonale sur F .

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

~