Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que les applications suivantes sont des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$:

1. Pour $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts : $\Psi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.

2. Pour $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

Exercice 2 —
Montrer que l'application φ définie ci-dessous est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \left(\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f, g) & \longmapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Exercice 3 —
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$

Exercice 4 — Montrer que : $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2}}}{2}$

Exercice 5 —

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \left(\mathscr{C}^2[0,1], \mathbb{R}\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (f, g) & \longmapsto & \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 —
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$

Exercice 7 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u, v, w) avec
$$u = (1, 0, 1), \qquad v = (1, 1, 1), \qquad w = (-1, 1, 0).$$

Exercice 8 — Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 1)$ et $(1, 2, -1)$

1. Donner une équation de F.

2. Déterminer une base de l'orthogonal de F.

3. Déterminer le projeté orthogonal de $(1, 1, 1)$ sur F.

Exercice 9 — Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni de sa structure euclidienne canonique. DÉterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur le plan F d'Équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z=0. \end{cases}$$

Exercice 10 — On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dÉfini par

$$F=\Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t=x-y+z-t=0\Big\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u,F)$ où $u=(1,2,3,4)$.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.
Montrer que toute famille orthonormée de n vecteurs de E forme une base de E.

Exercice 12 —
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $(.\mid .)$.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}((1,0,-2,),(1,1,1))$ muni du produit scalaire canonique.
2. $E=F=\mathbb{R}_2[X]$, $(P\mid Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $E=M_2(\mathbb{R})$, $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\right)$, $(A\mid B)=\mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$
4. $E=\mathbb{R}^4$, $F=\mathrm{Vect}((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique.
5. $E=\mathbb{R}[X]$, $F=\mathrm{Vect}(X^2+1,X^3+1)$, $(P\mid Q)=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 — Le passage à l'orthogonal renverse les inclusions
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E.
Montrer que si $F\subset G$, alors on a $G^\perp\subset F^\perp$.

Exercice 14 — Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F=\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 15 — Inégalité de Bessel
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.
Montrer que pour tout $x\in E$, $\|p_F(x)\|\leqslant\|x\|$.

$\sim$