Test 6 de mathématique

Exercice 1 : Séries et espaces préhilbertiens

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

1. Justifier que la série de terme général u_n diverge.

2. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$.

3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n}{n^3}$.

Exercice 2 : Déterminant

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$. Que peut-on en conclure pour l'application f ?

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(A - \lambda I_3)$.

3. En déduire les valeurs du réel λ pour lesquelles ce déterminant est nul.

4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente. Pourquoi était-il déjà certain qu'aucun de ces noyaux ne serait réduit au vecteur nul ?

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 3 : Séries

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge.

2. Déterminer des réels a, b, c et d tels que

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2}$$

3. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$

Exercice 4 : Espaces préhilbertiens réels

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on pose

$$F = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$$

1. Justifier que la famille $\big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\big)$ constitue une base orthogonale de F.

2. En déduire une base (e_1,e_2) orthonormée de F.

3. Soit p la projection orthogonale sur F et $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.
Déterminer $p(u)$, le projeté orthogonal de u sur F.

4. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit $v=(1,2,3,4)$. Calculer $d(v,F)$, la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F.

6. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F, puis de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

$\sim$