Test 6 de mathématique

Proposition de corrigé

Exercice 1 : Séries et espaces préhilbertiens

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

1. Justifier que la série de terme général u_n diverge.
u_n est la somme partielle d'une série dont le terme général $\sqrt{n}$ ne tend pas vers 0, donc u_n diverge grossièrement.
On en conclut que la série de terme général u_n diverge également grossièrement *(très grossièrement serait-on tenté de dire).*

2. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ considérons le produit scalaire usuel et les vecteurs

$$u = (\sqrt{0}, \sqrt{1}, ... \sqrt{n}) \qquad \text{et} \qquad v = (1, 1, ..., 1)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(u, v) \leqslant \|u\|\|v\|$$

soit

$$u_n \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k}\right)^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

On obtient donc bien le résultat.

3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n^3}$.
D'après la question précédente :

$$\frac{u_n}{n^3} \leqslant \frac{n\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Or $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1,5}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.
On en conclut, par multiplication par un scalaire, que $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est aussi le terme général d'une série convergente.
Ainsi le terme général de la série considérée est positif et majoré par l'équivalent d'un terme général de série convergente. On conclut par comparaison que la série converge.

Exercice 2 : Déterminant

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 3 \times 3 = -12.$$

Le déterminant de la matrice A n'est pas nul, donc le noyau de l'application f est réduit au vecteur nul, ce qui implique que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(A - \lambda I_3)$.
On a :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \times \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-2-\lambda)(1-\lambda) - 1) - 9(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

Remarque : On se souvient qu'une forme factorisée d'un déterminant est souvent préférable à une forme développée.
On aura pu observer que 3 est racine de $\lambda^2 + \lambda - 12$.

3. En déduire les valeurs du réel λ pour lesquelles ce déterminant est nul.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul, donc

$$\det(A) = 0 \iff \lambda \in \{1, 3, 4\}$$

4. Donner une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id})$ pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente. Pourquoi était-il déjà certain qu'aucun de ces noyaux ne serait réduit au vecteur nul ?

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 3 : Séries

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge.

On a :

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4}$$

Or $\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente.
Donc, d'après la comparaison par équivalent des séries à termes positifs, on conclut que la série converge.

2. Déterminer des réels a, b, c et d tels que

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2}$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2} &= \frac{an(n+1)^2 + b(n+1)^2 + cn^2(n+1) + dn^2}{n^2(n+1)^2}\\ &= \frac{(a+c)n^3 + (2a+b+c+d)n^2 + (a+2b)n + b}{n^2(n+1)^2}\end{aligned}$$

D'où, par identification des coefficients du polynôme au numérateur on a le système :

$$\begin{cases} a+c=0\\ 2a+b+c+d=0\\ a+2b=0\\ b=1\end{cases} \iff \begin{cases} b=1\\ a=-2\\ c=2\\ d=1\end{cases}$$

On en conclut :

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

3. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.
On a, par linéarité des sommations finies et décalages d'indices :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= -\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{2}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^2}\\ &= -2 + \frac{2}{N+1} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2}\end{aligned}$$

On en conclut, par quotient et somme de limites :

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -2 + 2\frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

D'où :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

Exercice 4 : Espaces préhilbertiens réels

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

1. Justifier que la famille $\big((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\big)$ constitue une base orthogonale de F.
2. En déduire une base (e_1, e_2) orthonormée de F.
3. Soit p la projection orthogonale sur F et $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
   Déterminer $p(u)$, le projeté orthogonal de u sur F.
4. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $v = (1, 2, 3, 4)$. Calculer $d(v, F)$, la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F.
6. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F, puis de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

$\sim$