DM 1 de mathématique

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Le problème est un sujet d'approfondissement. Chacun travaillera, en fonction de sa disponibilité et de ses objectifs :

- *soit les deux exercices ;*
- *soit le problème et un exercice ;*
- *soit le problème et les deux exercices.*

Exercice 1

On veut résoudre l'inéquation :

$$(I) \qquad 2\sqrt{x^2-6x+8} \geqslant x-1.$$

1. Le nombre 5 est-il solution de (I) ?

2. Justifier que les nombres inférieurs à 1 sont solution de (I).

3. Ensemble de définition de l'inéquation

  a. Déterminer la forme canonique du trinôme : x^2-6x+8.

  b. En déduire l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'inéquation (I).

4. Déterminer l'ensemble S solution de l'inéquation (I).

Exercice 2

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = \left(\sqrt{3}-i\right)^4 \qquad ; \qquad z_2 = (i-1)^5 \qquad ; \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, établir l'écriture algébrique de z_1.

2. Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1.

3. Donner sans justification l'écriture trigonométrique de $i-1$.
En déduire l'écriture trigonométrique de z_2.

4. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.

5. Donner, en exposant les calculs, les écritures algébriques et exponentielles de Z.

6. En déduire des valeurs exactes du cosinus et du sinus de l'angle $\dfrac{5\pi}{12}$, puis de l'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

Problème

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E_m) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ paramétrée par m :

$$x = m\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

On s'intéresse aux solutions de cette équation pour différentes valeurs de m.

1. Justifier que l'équation (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre les équations (E_0), (E_1) et (E_{-1}).

3. Soit x une solution de (E_m). Déterminer le signe de mx.

4. Détermination d'un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

- **a.** Démontrer que pour tout réel x positif : $x < \sqrt{x^2 + x + 1}$.
- **b.** Démontrer que pour tout réel x : $3x^2 \leqslant 4x^2 + 4x + 4$.
- **c.** En déduire que pour tout réel x négatif : $x \geqslant -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1}$.
- **d.** En déduire un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

5. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue m : $m^2(4 - 3m^2) \geqslant 0$.

6. Soit $m \in \left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right] \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère l'équation (E'_m) suivante d'inconnue x paramétrée par m :

$$(m^2 - 1)x^2 + m^2 x + m^2 = 0.$$

- **a.** Justifier que l'équation (E'_m) admet soit deux solutions distinctes x_1 et x_2, soit une seule solution x_0.
- **b.** Exprimer ces solutions en fonction de m.
- **c.** Résoudre sur l'intervalle $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ l'inéquation suivante d'inconnue m :

$$-m^2 + \sqrt{m^2(4 - 3m^2)} > 0.$$

- **d.** Discuter selon les valeurs de m du signe de x_1 et x_2.

7. A l'aide des questions précédentes, établir les résultats suivants :

- **a.** Si $m \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, l'équation (E_m) admet une unique solution.
- **b.** Si $m \in \left]-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -1\right[$, l'équation (E_m) admet deux solutions.

8. Résoudre l'équation (E_m) pour $m = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

9. Pour cette dernière question, on cherche à élargir le problème aux nombres complexes dans le seul cas : $m = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$.

- **a.** Démontrer qu'un nombre complexe Z est réel si et seulement si $\overline{Z} = Z$.
- **b.** En déduire que l'expression z^2+z+1 est réelle si et seulement si $(\overline{z}-z)(\overline{z}+z+1) = 0$.
- **c.** En déduire les valeurs du nombre complexe z pour lesquelles l'expression $\sqrt{z^2 + z + 1}$ est définie.
- **d.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)$: $z = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{z^2 + z + 1}$.

∼