Exercice 1 — Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de chacune des fonctions de deux variables f définies ci-dessous :

1. $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$
2. $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 16)$
3. $(x, y) \mapsto \ln(xy)$
4. $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 2y - 3}$
5. $(x, y) \mapsto \ln(2x + y - 2)$
6. $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - xy}$

Exercice 2 — Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 — Dérivées partielles Déterminer les dérivées partielles des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + \pi$
2. $f(x, y) = \sin(2xy - y)$
3. $f(x, y) = y \operatorname{Arctan}(2x + y)$
4. $f(x, y) = \cos(x - y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$
6. $f(x, y) = x \cos(\mathrm{e}^{xy})$

Exercice 4 — Continuité et dérivation

On s'intéresse à une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Justifier que $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les dérivées partielles de f dans $\mathscr{D}_f$.
4. Prolongement par continuité
   a. Majorer x^2 et $|xy|$ par des expressions en fonction de $\|(x, y)\|_2$.
   b. En déduire : $\forall (x, y) \in \mathscr{D}_f : \ |f(x, y)| \leqslant 4\|(x, y)\|_2$.
   c. En déduire un prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f.
5. Soit $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\vec{u} = (1, k)$.
   Étudier la dérivabilité de f au point $O = (0, 0)$ selon la direction du vecteur $\vec{u}$. *

Exercice 5 — Points critiques Déterminer les points critiques des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer la nature de ces points critiques :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$ *
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$
3. $f(x, y) = x^2 + 2y^3 - 2xy - 2y + 1$
4. $f(x, y) = x^3 + y^3$ *

Exercice 6 — Continuité Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \mathrm{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \mathrm{si}(x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \ \mathrm{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \mathrm{si}(x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

Exercice 7 — Composées $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(3x-2y) \end{array}$ *

2. $\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(\mathrm{e}^x - xy) \end{array}$

*

Exercice 8 — Composées $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. **a.** $f_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,t) \end{array}$ **b.** $f_2 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2,t^3) \end{array}$ **c.** $f_3 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(0,t) \end{array}$

2. **a.** $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & f(2\alpha-3\beta,\beta) \end{array}$ **b.** $\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & f\left(\sin(\alpha+2\beta), \dfrac{\alpha}{\beta}\right) \end{array}$

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad (x,y) \to \mathrm{e}^{x+y}(x-y+1)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer le gradient de f en $(0,0)$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent de f en $(0,0)$.
3. La fonction f possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x = y + z$?

$\sim$