Exercice 1 — Ensembles de définition
Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de chacune des fonctions de deux variables f définies ci-dessous :

1. $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$
2. $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 16)$
3. $(x, y) \mapsto \ln(xy)$
4. $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 2y - 3}$
5. $(x, y) \mapsto \ln(2x + y - 2)$
6. $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - xy}$

Exercice 2 — Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 — Dérivées partielles Déterminer les dérivées partielles des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + \pi$
2. $f(x, y) = \sin(2xy - y)$
3. $f(x, y) = y \operatorname{Arctan}(2x + y)$
4. $f(x, y) = \cos(x - y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$
6. $f(x, y) = x \cos(\mathrm{e}^{xy})$

Exercice 4 — Continuité et dérivation
On s'intéresse à une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Justifier que $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les dérivées partielles de f dans $\mathscr{D}_f$.
4. Prolongement par continuité
  a. Majorer x^2 et $|xy|$ par des expressions en fonction de $\|(x, y)\|_2$.
  b. En déduire : $\forall (x, y) \in \mathscr{D}_f : \ |f(x, y)| \leqslant 4\|(x, y)\|_2$.
  c. En déduire un prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f.
5. Soit $k \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\vec{u} = (1, k)$.
Étudier la dérivabilité de f au point $O = (0, 0)$ selon la direction du vecteur $\vec{u}$.
Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f((0,0) + t\vec{u}) = f(t, kt) = \dfrac{3t^2 + kt^2}{\sqrt{t^2 + k^2t^2}} = \dfrac{3 + k}{\sqrt{1 + k^2}}|t| \end{array}$$

Pour toute valeur de k autre que -3, la fonction f n'est pas dérivable en O selon le vecteur $(1, k)$.

Remarque : En $(0, 0)$, seule les dérivées selon les directions de $(1, -3)$ et de $(0, 1)$, à savoir la deuxième dérivée partielle, sont définies.

Exercice 5 — Points critiques Déterminer les points critiques des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer la nature de ces points critiques :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$

   La fonction f est polynomiale donc elle admet des dérivées partielles en tout point et

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y-3 \\ 2y+x-6 \end{pmatrix}$$

   Résolvons

   $$\nabla f(x,y) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 2y+x-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3-2x \\ 6-4x+x-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

   La fonction f possède donc un unique point critique $A = (0,3)$.

   On a : $\quad f(A) = -9 \quad$ et, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$:

   $$f(A+(h,k)) - f(A) = h^2 + (3+k)^2 + h(3+k) - 3h - 6(3+k) - (-9) = h^2 + k^2 + hk$$

   Or $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, (h+k)^2 \geqslant 0$, donc $h^2 + k^2 + hk \geqslant -hk$.
   Si $hk \leqslant 0$ alors $f(h, 3+k) \geqslant 0$ et si $hk > 0$ on a aussi, par somme de nombres positifs : $f(h,3+k) \geqslant 0$.

   On en conclut que f admet un minimum en A.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$
3. $f(x,y) = x^2 + 2y^3 - 2xy - 2y + 1$
4. $f(x,y) = x^3 + y^3$

   La fonction f est polynomiale donc elle admet des dérivées partielles en tout point et

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

   Ainsi

   $$\nabla f(x,y) = \vec{0} \iff (x,y) = (0,0)$$

   La fonction f possède donc un unique point critique $O = (0, O)$.

   La fonction partielle $x \mapsto f(x,0) = x^3$ n'admet pas d'extremum en 0, donc la fonction f n'admet pas d'extremum en O.

Exercice 6 — Continuité Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

Exercice 7 — Composées $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(3x-2y) \end{array}$

La fonction φ est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc elle admet des dérivées partielles. D'après le théorème sur la dérivé des fonctions composées :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x,y) = 3f'(3x-2y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x,y) = -2f'(3x-2y).$$

2. $\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(\mathrm{e}^x - xy) \end{array}$

La fonction ψ est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc elle admet des dérivées partielles. D'après le théorème sur la dérivé des fonctions composées :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} f(x,y) = 3f'(3x-2y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x,y) = -2f'(3x-2y).$$

Exercice 8 — Composées $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. **a.** $f_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,t) \end{array}$ **b.** $f_2 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t^2,t^3) \end{array}$ **c.** $f_3 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(0,t) \end{array}$

2. **a.** $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & f(2\alpha-3\beta,\beta) \end{array}$ **b.** $\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & f\left(\sin(\alpha+2\beta), \dfrac{\alpha}{\beta}\right) \end{array}$

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad (x,y) \to \mathrm{e}^{x+y}(x-y+1)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer le gradient de f en $(0,0)$.

2. Déterminer l'équation du plan tangent de f en $(0,0)$.

3. La fonction f possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x = y + z$?

$\sim$