Table des matières

Chapitre 27

Fonctions de deux variables

授人以鱼，不如授人以渔。

Si tu donnes un poisson à un homme, il mangera un jour ; si tu lui apprend à pêcher, il mangera toute sa vie.
Proverbe chinois

1 Fonctions de deux variables et représentation graphique

Définition 1 (Fonction, ensemble de définition, graphe)
Dans ce chapitre, nous appellerons **fonction à deux variables** *toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'***ensemble de définition** *$\mathscr{D}_f$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ des couples (x, y) tels que $f(x, y)$ est défini dans $\mathbb{R}$. Le* **graphe** *de f est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \in \mathscr{D}_f$ et $z = f(x, y)$.*

Exemples 1

- *La fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^2 - y^3 + xy - 5x$ est définie sur $\mathbb{R}^2$*
- *Soit $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$.*
  $g(x, y) \in \mathbb{R} \iff x + y - 1 > 0$ *donc* $\mathscr{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 > 0\}$.
  La fonction g est définie sur le demi-plan « ouvert » « supérieur » délimité par la droite d'équation $y = 1 - x$.
- *Soit $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.*
  $h(x, y) \in \mathbb{R} \iff 4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ *donc* $\mathscr{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.
  La fonction g est définie sur le disque « fermé » délimité par le cercle de centre O et de rayon 2.

Remarque : Si on fixe l'une des deux variables, alors la fonction f définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On parle alors de ***fonction partielle*** de la fonction f.
Par exemple dans la fonction g ci-dessus, si on fixe y à 1 on définit la fonction $x \mapsto g(x, 1) = \ln(x)$ qui est la fonction logarithme népérien.

2 Continuité

Pour la suite l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de sa norme euclidiens, ainsi que de la base orthonormée canonique $(\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}=(1,0)$ et $\vec{j}=(0,1)$.

On considère une bijection f de $\mathbb{R}^2$ dans un ensemble P : $\quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & P \\ (x,y) & \longmapsto & M(x,y) \end{array}$

et $\quad g : \begin{array}{ccc} P^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (M(x,y),N(x',y')) & \longmapsto & \overrightarrow{MN}=(x'-x,y'-y) \end{array}$

L'ensemble P est appelé plan affine, ses éléments sont appelés points et $f((0,0))$ est désigné conventionnellement par la lettre O. Pour tout $M(x,y)\in P$ on a :

$$\overrightarrow{OM}=(x-0,y-0)=x(1,0)+y(0,1)=x\vec{i}+y\vec{j}$$

et on dira que le point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout $(A(x_A,y_A),B(x_B,y_B))\in P^2$ on définit la distance de A à B que l'on notera AB :

$$d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|=\|((x_B,y_B)-(x_A,y_A)\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Les propriétés d'espace vectoriel euclidien sont transférables de $\mathbb{R}^2$ à P via la bijection f.
On parlera dans la suite de « point de $\mathbb{R}^2$ ».

Définition 2 (Continuité en un point/sur une partie de $\mathbb{R}^2$)
Soit $U\subset\mathbb{R}^2$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et l'application $f:U\mapsto\mathbb{R}$.
On dit que f est continue en $(x_0,y_0)\in U$ lorsque :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*\quad|\quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\|\leqslant\eta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant\varepsilon$$

On dit que f est continue sur U lorsqu'elle est continue en chaque point de U.
On appelle $\mathscr{C}(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1
Soit $U\subset\mathbb{R}^2$, et $(f,g)\in(\mathscr{C}(U,\mathbb{R}))^2$.
Toute combinaison linéaire, produit, quotient et composition de f et g est également continue en chaque point où elle est définie.

Exemples 2

- *Une fonction à deux variables est dite polynomiale si ses fonctions partielles (obtenues en fixant l'une des variables) sont polynomiales. Les fonctions polynomiales sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.*
- *La fonction f à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ est discontinue en chaque point de $C=(\mathbb{Z}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$ et continue sur $\mathbb{R}^2/C$.*

3 Dérivabilité

3.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 3 (Boule ouverte/fermée de $\mathbb{R}^2$)
Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle **boule ouverte** *de centre A et de rayon r l'ensemble $B(A, r)$ des éléments M de $\mathbb{R}^2$ tels que $AM < r$.*
On appelle **boule fermée** *de centre A et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(A, r)$ des éléments M de $\mathbb{R}^2$ tels que $AM \leqslant r$.*

Remarque : On parle aussi de ***disque ouvert/disque fermé*** de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$)
Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert de** $\mathbb{R}^2$ *lorsque tous les éléments de U sont le centre d'une boule ouverte incluse dans U, c'est à dire lorsque :*

$$\forall A \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid B(A, r) \subset U$$

Remarque : Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3.2 Dérivées partielles

Définition 5 (première et deuxième dérivées partielle)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et (x_0, y_0) un point de U.
Lorsque la fonction partielle $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, c'est à dire lorsque :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, on appelle cette limite **première dérivée partielle** *de f en (x_0, y_0) et on la note :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De même lorsque la fonction partielle $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, c'est à dire lorsque :

$$\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, on appelle cette limite **deuxième dérivée partielle** *de f en (x_0, y_0) et on la note :*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemples 3

- *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \mathrm{e}^{xy^2} \end{array}$. *

- *Soit* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^y \end{array}$. *

Définition 6 (Gradient)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables dont les dérivées partielles sont définies en tout point de U.
On appelle **gradient de f** *l'application appelée « nabla de f » :*

$$\begin{array}{rccl} \nabla f & : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{array}$$

Exemple 1
Soit $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & 2x^2y - \sin(x) \end{array}$.

*

3.3 Dérivées selon un vecteur

Définition 7 (Dérivée directionnelle)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en $(x,y) \in U$ selon le vecteur $\vec{v}$, ou dans la direction du vecteur $\vec{v}$, si la fonction $\varphi : t \mapsto f((x,y) + t\vec{v})$ est dérivable en 0.
Dans ce cas, on appelle **dérivée de f en (x,y) selon le vecteur $\vec{v}$** *le réel :*

$$D_{\vec{v}} f(x,y) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t\vec{v}) - f(x,y)}{t}$$

Remarques :

- La première (respectivement deuxième) dérivée partielle de f en (x,y) correspond à la dérivée selon le vecteur $(1,0)$ (respectivement $(0,1)$).
- Une dérivée selon un vecteur $\vec{v}$ dépend de la direction de $\vec{v}$, mais aussi de sa norme. Pour que ce nombre $D_{\vec{v}} f(x,y)$ soit comparable, notamment à $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, il faut : $\|\vec{v}\| = 1$.
- Une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans qu'elle soit dérivable en ce point selon toutes les directions.

Exemples 4

- $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{|xy|} \end{array}$

  On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,0) = f(0,y) = 0$ donc les dérivées partielles en $O = (0,0)$ sont définies et valent zéro.
  La fonction φ associée à la fonction f en $(0,0)$ selon le vecteur $\vec{v} = (1,1)$ est :

  $$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f((0,0) + (t,t)) = f(t,t) = |t| \end{array}$$

  La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, donc la fonction f n'est pas dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,1)$.

  Remarque : f n'est dérivable en O selon aucune direction autre que celles de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $g(0,0) = 0$ *et* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$: $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

  On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,0) = g(0,y) = 0$ *donc les dérivées partielles en* $O = (0,0)$ *sont définies et valent* 0.

  Or $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ g(t,t)) = \dfrac{1}{2}$.

  On en conclut que

  $$\forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (0,0)\| < \eta \text{ et } |g(x,y) - g(0,0)| > \frac{1}{4}$$

  La fonction g *n'est donc, par définition, pas continue en* O.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

4.1 Définition et exemples

Définition 8
Soit U *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de deux variables. On dit que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U *lorsque les dérivées partielles de* f *sont définies et continues sur* U.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* U *est noté :* $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

Théorème 2
Les combinaisons linéaires, produits, et quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans tout ouvert où elles sont définies.*
Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *est une fonction d'une variable réelle de classe* $\mathscr{C}^1$*, la composée* $\varphi \circ f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur tout ouvert où elle est définie.*

Exemples 5

- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *telles que* $(x,y) \mapsto x$ *a en tout point un gradient défini et égal à* $(1,0)$*, donc les dérivée partielles sont continues sur* $\mathbb{R}^2$*. Cette fonction est donc de classe* $\mathscr{C}^1$.
- *Pour les mêmes raisons la fonction* $(x,y) \mapsto y$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$.
- *Par produit et combinaison linéaire des deux fonctions ci-dessus, les fonctions polynomiales sont de classe* $\mathscr{C}^1$.
- *Par quotient on en déduit que les fonctions quotients de polynômes sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur tout ouvert où elles sont définies.*
- *La fonction* $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^x \ln(x)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ *car les fonctions* $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$, $\exp$ *et* $\ln$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur leur ensemble de définition.*

4.2 Développement limité d'ordre 1

Théorème - Définition 3 (Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$)
Soit U *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de deux variables, et* (x,y) *un point de* U.
Si f *est de classe* $\mathscr{C}^1$*, alors* f *admet un développement limité d'ordre 1 donné par :*

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k + o(\|(h,k)\|)$$

ou dit autrement :

$$f((x,y) + (h,k)) = f(x,y) + \nabla f(x,y).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|)$$

Définition 9
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et (x_0, y_0) un point de U.
On appelle **plan tangent** *à f en (x_0, y_0) le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

<u>Remarque</u> : Le plan tangent à f en (x_0, y_0) est le graphe de la meilleure approximation de la fonction f par une fonction polynomiale de degré 1 au voisinage de (x_0, y_0).

Exemple 2
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - y^2 + xy + x - 1 \end{array}$.
Déterminons l'équation du plan tangent à f en $(2, -1)$.

*

Théorème 4 (Condition suffisante de continuité)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de deux variables.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f ***est continue sur*** *U.*

4.3 Formules de dérivation des fonctions composées

Théorème 5 (Règle de la chaîne pour les composées $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
Soit

- *U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables*
- *I un intervalle de $\mathbb{R}$*
- $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$ *où x et y appartiennent à $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\varphi(I) \subset U$*
- *$h = f \circ \varphi$, à savoir* $h : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t)) \end{array}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$:

$$h'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

ou dit autrement :

$$h'(t) = \nabla f(x(t), y(t)).\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : Ce résultat établit que si l'on parcours un « chemin régulier » (paramétré par t) dans $\mathbb{R}^2$, alors les images par f des points de ce chemin vérifient la régularité $\mathscr{C}^1$ de la fonction f.

Théorème 6 (Règle de la chaîne pour les composées $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
Soit

- *U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de deux variables définie sur U*
- *V un autre ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, x et y deux fonctions de $\mathscr{C}^1(V, \mathbb{R})$ telles que $\forall(\alpha, \beta) \in V, (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) \in U$.*
- $h : \begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & f(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) \end{array}$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et pour tout $(\alpha, \beta) \in V$:

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)\, \frac{\partial f}{\partial x}(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) + \frac{\partial y}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)\, \frac{\partial f}{\partial y}(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{\partial x}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\, \frac{\partial f}{\partial x}(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) + \frac{\partial y}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\, \frac{\partial f}{\partial y}(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta))$$

5 Extremums d'une fonction à deux variables

Définition 10 (Extremum global)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
Soit $A = (x_A, y_A) \in U$.
On dit que f admet en A

- *un* **minimum global** *lorsque* ***pour tout*** $(x, y) \in U$**,** $f(x, y) \geqslant f(A)$ *;*
- *un* **maximum global** *lorsque* ***pour tout*** $(x, y) \in U$**,** $f(x, y) \leqslant f(A)$ *;*
- *un* **extremum global** *lorsque f* ***admet en*** A ***un minimum ou un maximum global.***

Définition 11 (Extremum local)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
Soit $A(x_A, y_A) \in U$.
On dit que f admet en A

- *un* **minimum local** *lorsque* $\exists\, r > 0 \mid \forall(x, y) \in B(A, r),\ f(x, y) \geqslant f(A)$ *;*
- *un* **maximum local** *lorsque* $\exists\, r > 0 \mid \forall(x, y) \in B(A, r),\ f(x, y) \leqslant f(A)$ *;*
- *un* **extremum local** *lorsque f* ***admet en*** A ***un minimum ou un maximum local.***

Exemple 3
La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sin(x) + \cos(y) \end{array}$

Définition 12 (Point critique)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $A(x, y) \in U$.
On dit que A est un point critique de f lorsque $\nabla f(A) = \vec{0}$, c'est à dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Théorème 7 (Condition nécessaire d'extremalité)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $A(x, y) \in U$.

Si f admet un extremum local en A, alors A ***est un point critique de*** *f.*

Exemples 6

- *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$ ***est $\mathscr{C}^1$ et admet un minimum local en*** 0.
  On en déduit que O ***est un point critique de f, c'est à dire que*** $\nabla f(O) = \vec{0}$.

- *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{array}$.
  Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$.
  On en déduit que $\nabla f(O) = \vec{0}$ donc O est un point critique de f.
  Cependant $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, 0) = x^2 > f(0, 0)$ et $\forall y \in \mathbb{R}^*, f(0, y) = -y^2 < f(0, 0)$.
  Donc O n'est ni un maximum, ni un minimum local.
  Ce contre-exemple établit que la réciproque du théorème 7 est fausse.

$\sim$