DM 1 de mathématique

Indications

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Le problème est un sujet d'approfondissement. Chacun travaillera, en fonction de sa disponibilité et de ses objectifs :

- *soit les deux exercices ;*
- *soit le problème et un exercice ;*
- *soit le problème et les deux exercices.*

Exercice 1

On veut résoudre l'inéquation :

$$(I) \qquad 2\sqrt{x^2-6x+8} \geqslant x-1.$$

1. Le nombre 5 est-il solution de (I) ?
Tester l'existence de la racine carrée, puis l'inégalité.

2. Justifier que les nombres inférieurs à 1 sont solution de (I).
L'argument (l'antécédent) de la fonction racine carrée doit être positif, et son image est nécessairement positive.

3. Ensemble de définition de l'inéquation

- **a.** Déterminer la forme canonique du trinôme : x^2-6x+8.
- **b.** En déduire l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de l'inéquation (I).

4. Déterminer l'ensemble S solution de l'inéquation (I).
Quand deux nombres sont positifs, ils sont dans le même ordre que leurs carrés (car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, ses images sont dans le même ordre que ses antécédents).

Exercice 2

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = \left(\sqrt{3}-i\right)^4 \quad ; \quad z_2 = (i-1)^5 \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, établir l'écriture algébrique de z_1.

2. Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1.
Commencer par déterminer l'écriture trigonométrique de $\sqrt{3}-i$.
Par écriture trigonométrique, on peut entendre écriture exponentielle.

3. Donner sans justification l'écriture trigonométrique de $i-1$.
En déduire l'écriture trigonométrique de z_2.

4. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
On peut utiliser la formule du binôme de Newton ou utiliser l'écriture trigonométrique obtenue précédemment.

5. Donner, en exposant les calculs, les écritures algébriques et exponentielles de Z.
Bien choisir la forme retenue pour obtenir le résultat souhaité.

6. En déduire des valeurs exactes du cosinus et du sinus de l'angle $\dfrac{5\pi}{12}$, puis de l'angle $\dfrac{\pi}{12}$.
Comparer les formes algébriques et trigonométriques de Z.
Faire usage des symétries du cercle trigonométrique.

Problème

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E_m) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ paramétrée par m :

$$x = m\sqrt{x^2+x+1}.$$

On s'intéresse aux solutions de cette équation pour différentes valeurs de m.

1. Justifier que l'équation (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$.
Signe du trinôme

2. Résoudre les équations (E_0), (E_1) et (E_{-1}).
Il s'agit de résoudre :

$$x = 0 \qquad ; \qquad x = \sqrt{x^2+x+1} \qquad ; \qquad x = -\sqrt{x^2+x+1}$$

Après le cas trivial, réfléchir aux signes puis penser aux carrés des deux membres de l'équation,

3. Soit x une solution de (E_m). Déterminer le signe de mx.
Une racine carrée est positive.

4. Détermination d'un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

   a. Démontrer que pour tout réel x positif : $\quad x < \sqrt{x^2+x+1}$.
   Croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

   b. Démontrer que pour tout réel x : $\quad 3x^2 \leqslant 4x^2+4x+4$.
   Signe d'un carré

   c. En déduire que pour tout réel x négatif : $\quad x \geqslant -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$.
   Croissance de la fonction racine carrée, valeur absolue d'un réel négatif.

   d. En déduire un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.
   *Le résultat de la question **4.a.** permet de conclure que si $m=1$, l'équation n'a pas de solution. Mais en réfléchissant un peu, on remarque que beaucoup d'autres valeurs de m conduisent à une équation (E_m) sans solution.*
   *Le même type de raisonnement permet d'exploiter le résultat de la question **4.c.***

5. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue m : $\quad m^2(4-3m^2) \geqslant 0$.
Signe d'un produit

6. Soit $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \setminus \{-1, 0, 1\}$.
On considère l'équation (E'_m) suivante d'inconnue x paramétrée par m :

$$(m^2-1)x^2 + m^2x + m^2 = 0.$$

a. Justifier que l'équation (E'_m) admet soit deux solutions distinctes x_1 et x_2, soit une seule solution x_0.
Calculer le discriminant du trinôme en fonction de m.

b. Exprimer ces solutions en fonction de m.
Les formules habituelles, à utiliser avec le paramètre m.

c. Résoudre sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ l'inéquation suivante d'inconnue m :

$$-m^2 + \sqrt{m^2(4-3m^2)} > 0.$$

Se ramener à la comparaison d'une racine carrée et d'un autre nombre, puis appliquer la fonction carré à chaque membre.

d. Discuter selon les valeurs de m du signe de x_1 et x_2.
Faire le rapprochement entre le résultat de question ***6.c.*** *et les nombres x_1 et x_2.*

7. A l'aide des questions précédentes, établir les résultats suivants :

a. Si $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, l'équation (E_m) admet une unique solution.
Faire le lien entre les égalités (E_m) et $(E'_m$, puis utiliser les résultats des questions ***3.*** *et* ***6.d.****.*

b. Si $m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right[$, l'équation (E_m) admet deux solutions.
Utiliser le résultat de la question ***6.d.***

8. Résoudre l'équation (E_m) pour $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.
Considérer les signes puis appliquer la fonction carré sur un intervalle où elle est bijective (strictement monotone).

9. Pour cette dernière question, on cherche à élargir le problème aux nombres complexes dans le seul cas : $m = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

a. Démontrer qu'un nombre complexe Z est réel si et seulement si $\overline{Z} = Z$.
avec l'écriture algébrique

b. En déduire que l'expression z^2+z+1 est réelle si et seulement si $(\overline{z}-z)(\overline{z}+z+1) = 0$.
Appliquer le résultat précédent avec $Z = z^2 + z + 1$.

c. En déduire les valeurs du nombre complexe z pour lesquelles l'expression $\sqrt{z^2+z+1}$ est définie.
On se souvient que tout nombre complexe admet deux racines carrées distinctes (opposées) sauf s'il appartient à $\mathbb{R}^+$. Dès lors l'écriture $\sqrt{a}$ n'est définie que lorsque $a \in \mathbb{R}^+$.

d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_{e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)$: $\quad z = e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{z^2+z+1}$.
Considérer plusieurs cas.

∼