

DM 1 de mathématique

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Le problème est un sujet d'approfondissement. Chacun travaillera, en fonction de sa disponibilité et de ses objectifs :

- soit les deux exercices ;
- soit le problème et un exercice ;
- soit le problème et les deux exercices.

Exercice 1

On veut résoudre l'inéquation :

$$(I) \quad 2\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq x - 1.$$

1. Le nombre 5 est-il solution de (I) ?

Calculons : $5^2 - 6 \times 5 + 8 = 25 - 30 + 8 = 3 > 0$.

Donc pour $x = 5$ le membre de gauche de l'inégalité est défini et vaut $2\sqrt{3}$.

Le membre de droite vaut $5 - 1 = 4$.

Or $\sqrt{3} < 2$ donc $2\sqrt{3} < 4$.

Le nombre 5 n'est pas solution de l'inéquation (I).

2. Justifier que les nombres inférieurs à 1 sont solution de (I).

Si $x < 1$ (il est naturel d'interpréter « inférieur » par « strictement inférieur ») alors $-6x > -6$.

Or pour tout réel x : $x^2 + 8 \geq 8$.

Donc l'argument de la racine carrée est positif si $x < 1$.

En outre si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$, le membre de droite de l'inégalité est strictement négatif.

Or la racine carrée est positive, donc l'inégalité est vérifiée pour tout nombre inférieur à 1.

3. Ensemble de définition de l'inéquation

- a. Déterminer la forme canonique du trinôme : $x^2 - 6x + 8$.

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x - 3)^2 - 1.$$

- b. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de l'inéquation (I).

La racine carrée est définie si et seulement si son argument est supérieur ou égal à 0.

On a, pour tout réel x :

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1^2 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

La règle du signe du trinôme nous permet de conclure :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]2; 4[.$$

4. Déterminer l'ensemble S solution de l'inéquation (I) .

Soit $x \geq 1$. Alors les deux membres de l'inégalité sont positifs. Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on peut écrire :

$$I \iff 4(x^2 - 6x + 8) \geq (x - 1)^2 \iff 3x^2 - 22x + 31 \geq 0$$

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = (-22)^2 - 4 \times 331 = 484 - 372 = 112 = 4^2 \times 7 > 0$.
On obtient les racines :

$$x_1 = \frac{22 - 4\sqrt{7}}{2 \times 3} = \frac{11 - 2\sqrt{7}}{3} > 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{7}}{3} > 1$$

On conclut donc d'après la règle du signe du trinôme :

$$S = \left] -\infty, \frac{11 - 2\sqrt{7}}{3} \right] \cup \left[\frac{11 + 2\sqrt{7}}{3}, +\infty \right[.$$

Exercice 2

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = (\sqrt{3} - i)^4 \quad ; \quad z_2 = (i - 1)^5 \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, établir l'écriture algébrique de z_1 .

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \sqrt{3}^{4-k} (-i)^k \\ &= \sqrt{3}^4 + 4 \times \sqrt{3}^3 \times (-i) + 6 \times \sqrt{3}^2 \times (-i)^2 + 4 \times \sqrt{3} \times (-i)^3 + (-i)^4 \\ &= 9 - 12\sqrt{3}i - 6 \times 3 + 4\sqrt{3}i + 1 \\ &= -8 - 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Astuce : Pour simplifier la question des signes, on peut utiliser ce résultat dont on se convainc assez facilement :

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} : \quad (a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Les signes vont alterner à chaque terme de la somme. Ainsi :

$$z_1 = \sqrt{3}^4 - 4 \times \sqrt{3}^3 \times i + 6 \times \sqrt{3}^2 \times i^2 - 4 \times \sqrt{3} \times i^3 + i^4$$

2. Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1 .

On reconnaît dans $\sqrt{3} - i$ le double de cosinus et sinus d'angles remarquables, on peut s'aider d'un schéma, on peut même le représenter sur sa copie.

$$z_1 = \left(2 e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^4 = 2^4 e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 16 e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Remarque : On pouvait aussi partir de l'écriture algébrique de z_1 obtenue à la question précédente, mais avec le risque que ce résultat soit erroné. En outre, la méthode retenue permet une double vérification : en développant la forme trigonométrique on doit retomber sur la forme algébrique.

3. Donner sans justification l'écriture trigonométrique de $i - 1$.

En déduire l'écriture trigonométrique de z_2 .

On a : $i - 1 = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}.$

D'où : $z_2 = \sqrt{2}^5 e^{5 \times \frac{3i\pi}{4}} = 4\sqrt{2} e^{\frac{15i\pi}{4}} = 4\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \text{car} \quad \frac{15}{4} \equiv -\frac{1}{4} \quad [2].$

Remarque : L'avant-dernière expression était valable mathématiquement, mais on préfère donner les arguments en mesure principale.

4. Déterminer l'écriture algébrique de z_2 .

Méthode 1 : A l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} z_2 &= (i - 1)^5 = i^5 - 5i^4 + 10i^3 - 10i^2 + 5i - 1 \\ &= i - 5 - 10i + 10 + 5i - 1 \\ &= 4 - 4i \end{aligned}$$

Méthode 2 : A l'aide du résultat de la question précédente :

$$z_2 = 4\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 4 - 4i.$$

5. Donner, en exposant les calculs, les écritures algébriques et exponentielles de Z .

On a :

$$Z = \frac{x_1}{x_2} = \frac{-8 - 8\sqrt{3}i}{4 - 4i} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{i - 1} = \frac{(2 + 2\sqrt{3}i)(-1 - i)}{2} = (1 + \sqrt{3}i)(-1 - i)$$

D'où l'écriture algébrique de Z :

$$\boxed{Z = \sqrt{3} - 1 + i(-1 - \sqrt{3})}$$

En outre :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{16 e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{4\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4})i\pi} = \boxed{2\sqrt{2} e^{-\frac{5i\pi}{12}}}$$

6. En déduire des valeurs exactes du cosinus et du sinus de l'angle $\frac{5\pi}{12}$, puis de l'angle $\frac{\pi}{12}$.

L'écriture exponentielle de Z fournit :

$$Z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

En identifiant les expressions de la partie réelle de Z dans les deux écritures on obtient :

$$2\sqrt{2} \cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = \sqrt{3} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

La parité de la fonction cosinus nous permet de conclure :

$$\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

En identifiant les expressions de la partie imaginaire de Z on obtient :

$$2\sqrt{2} \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = -1 - \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

L'imparité de la fonction sinus nous permet de conclure :

$$\sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Méthode 1 : En traçant le cercle trigonométrique, la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère établit le résultat :

$$\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

Méthode 2 : On a les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos(x)$$

On obtient donc :

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Problème

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E_m) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ paramétrée par m :

$$x = m\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

On s'intéresse aux solutions de cette équation pour différentes valeurs de m .

1. Justifier que l'équation (E_m) est définie sur $\mathbb{R}$.

L'équation (E_m) est définie si et seulement si l'argument de la racine carrée est positif.

Or pour tout réel x :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

L'équation (E_m) est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre les équations (E_0) , (E_1) et (E_{-1}) .

(E_0) : $x = 0$. L'ensemble solution est donc le singleton : $\mathcal{S}_0 = \{0\}$.

(E_1) : $x = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Une racine carrée est positive donc l'équation (E_1) n'a pas de solution strictement négative.

Pour tout x positif :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2 + x + 1} \\ \iff x^2 &= x^2 + x + 1 \quad \text{car la fonction carré est bijective sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff x &= -1 \end{aligned}$$

Aucun x positif ne vérifie cette condition, donc l'ensemble solution est vide : $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

Autre méthode : Pour tout x positif les assertions suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} x + 1 &> 0 \\ x^2 + x + 1 &> x^2 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} &> \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

(E_{-1}) : $x = -\sqrt{x^2 + x + 1}$.

Une racine carrée est positive donc l'équation (E_{-1}) n'a pas de solution strictement positive.

Pour tout x négatif :

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{x^2 + x + 1} \\ \iff x^2 &= x^2 + x + 1 \quad \text{car la fonction carré est bijective sur } \mathbb{R}^- \\ \iff x &= -1 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le singleton : $\mathcal{S}_{-1} = \{-1\}$.

3. Soit x une solution de (E_m) . Déterminer le signe de mx .

x est égal à m multiplié par un nombre strictement positif, donc x et m ont même signe.

Il s'en suit : $mx \geq 0$.

Autre méthode : $x = m\sqrt{x^2 + x + 1} \implies xm = m^2\sqrt{x^2 + x + 1} \geq 0$, par positivité des fonctions carré et racine carrée.

4. Détermination d'un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

- a. Démontrer que pour tout réel x positif : $x < \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Pour tout x positif :

$$\begin{aligned} x &< \sqrt{x^2 + x + 1} \\ \iff x^2 &< x^2 + x + 1 \quad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff x &> -1 \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie pour tout réel x positif.

- b. Démontrer que pour tout réel x : $3x^2 \leq 4x^2 + 4x + 4$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : 3x^2 \leq 4x^2 + 4x + 4 \iff (x+2)^2 \geq 0.$$

L'inégalité est donc vraie pour tout réel x .

- c. En déduire que pour tout réel x négatif : $x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1}$.

Pour tout réel négatif les inégalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} 3x^2 &\leq 4x^2 + 4x + 4 \\ \iff \sqrt{3}\sqrt{x^2} &\leq \sqrt{4x^2 + 4x + 4} \\ \iff |x| &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Mais comme x est négatif, $|x| = -x$. On a donc bien : $x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1}$.

- d. En déduire un ensemble de valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

Soit $m \geq 1$. Alors si x est une solution de (E_m) elle est positive (d'après la question 3.) et, d'après la question 4.a. :

$$x < \sqrt{x^2 + x + 1} \leq m\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Dans ce cas on ne peut avoir $x = m\sqrt{x^2 + x + 1}$.

L'équation (E_m) n'admet donc pas de solution si $m \geq 1$.

Soit $m < -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Alors si x est une solution de (E_m) elle est négative (d'après la question 3.) et, d'après la question 4.c. :

$$x \geq -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1} > m\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Dans ce cas on ne peut avoir $x = m\sqrt{x^2 + x + 1}$.

L'équation (E_m) n'admet donc pas de solution si $m < -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On en conclue que l'équation (E_m) n'a pas de solution pour tout m de l'ensemble

$$\left] -\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right[\cup [1; +\infty[.$$

5. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue m : $m^2(4 - 3m^2) \geq 0$.

Le facteur m^2 est positif pour tout m .

Le second facteur est un trinôme de coefficient directeur négatif et admettant $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ comme racine.

D'après la règle du signe du trinôme et celle du signe d'un produit on conclut :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right].$$

6. Soit $m \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right] \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère l'équation (E'_m) suivante d'inconnue x paramétrée par m :

$$(m^2 - 1)x^2 + m^2x + m^2 = 0.$$

- a. Justifier que l'équation (E'_m) admet soit deux solutions distinctes x_1 et x_2 , soit une seule solution x_0 .

Les solutions de cette équation sont les racines d'un trinôme dont le discriminant est :

$$\Delta = (m^2)^2 - 4m^2(m^2 - 1) = m^2(4 - 3m^2).$$

D'après la question 5., nous savons que ce discriminant est nul pour $m \in \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$ (le cas $m = 0$ étant exclus par l'énoncé), et strictement positif pour les autres valeurs de m .

L'équation (E'_m) admet donc bien soit deux, soit une solution.

- b. Exprimer ces solutions en fonction de m .

Si $m \in \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$, alors $\Delta = 0$ et $x_0 = -\frac{m^2}{2(m^2 - 1)}$.

Sinon

$$x_1 = \frac{-m^2 - \sqrt{m^2(4 - 3m^2)}}{2(m^2 - 1)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-m^2 + \sqrt{m^2(4 - 3m^2)}}{2(m^2 - 1)}.$$

- c. Résoudre sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$ l'inéquation suivante d'inconnue m :

$$-m^2 + \sqrt{m^2(4 - 3m^2)} > 0.$$

$$\begin{aligned} & -m^2 + -m^2 + \sqrt{m^2(4 - 3m^2)} > 0 \\ \iff & \sqrt{m^2(4 - 3m^2)} > m^2 \\ \iff & m^2(4 - 3m^2) > m^4 \\ \iff & m^2(4 - 4m^2) > 0 \\ \iff & m^2(1 - m^2) > 0 \end{aligned}$$

La règle du signe d'un produit et d'un trinôme fournit : $\mathcal{S} =]-1, 1[\setminus \{0\}$.

- d. Discuter selon les valeurs de m du signe de x_1 et x_2 .

On observe que nous avons établi à la question précédente l'ensemble des valeurs de m telles que le numérateur de x_2 est strictement positif.

Deux tableaux de signe, faisant valoir la règle du signe d'un quotient, établissent que si $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ alors $x_2 > 0$, sinon $x_2 \leq 0$;

x_1 est négatif pour toutes les valeurs de m considérées.

7. A l'aide des questions précédentes, établir les résultats suivants :

Remarque : La logique de l'exercice veut que l'on fasse un lien entre l'équation (E_m) et celle de la question 6..

- a. Si $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, l'équation (E_m) admet une unique solution.

On a :

$$\begin{aligned} (m^2 - 1)x^2 + m^2x + m^2 &= 0 \\ \iff x^2 &= m^2(x^2 + x + 1) \\ \iff |x| &= |m|\sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Les égalités de (E'_m) et (E_m) sont donc équivalentes lorsque x et m ont même signe. Nous avons vu à la question 3. que si x et m ont des signes différents, l'égalité (E_m) ne peut être vérifiée.

Or, d'après la question 6.d. si $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, les solutions de l'équation (E'_m) sont de signe différent.

Ainsi, quelle que soit la valeur de $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, une seule de ces deux solution de (E'_m) est aussi solution de (E_m) .

On en déduit que $m \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, l'équation (E_m) admet une unique solution.

- b. Si $m \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \right[$, l'équation (E_m) admet deux solutions.

D'après la question 6.d., si $m \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \right[$, l'équation (E'_m) admet deux solutions négatives, donc du même signe que m . Ces deux solutions sont donc alors également solution de (E_m) .

Donc si $m \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1 \right[$, l'équation (E_m) admet deux solutions.

8. Résoudre l'équation (E_m) pour $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\left(E_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) : x = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Le membre de droite de l'égalité est négatif pour tout x .

Résolvons donc sur $\mathbb{R}^-$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + x + 1} \\ \iff x^2 &= \frac{4}{3}(x^2 + x + 1) \quad \text{car la fonction carré est bijective de } \mathbb{R}^- \text{ vers } \mathbb{R}^- \\ \iff 3x^2 &= 4x^2 + 4x + 4 \\ \iff x^2 + 4x + 4 &= 0 \iff (x + 2)^2 = 0 \iff x = -2. \end{aligned}$$

On obtient : $\mathcal{S} = \{-2\}$.

9. Pour cette dernière question, on cherche à élargir le problème aux nombres complexes dans le seul cas : $m = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

a. Démontrer qu'un nombre complexe Z est réel si et seulement si $\overline{Z} = Z$.

Soit $a + ib$ l'écriture algébrique de Z . Alors $\overline{Z} = a - ib$ et

$$\overline{Z} = Z \iff a - ib = a + ib \iff \begin{cases} a = a \\ -b = b \end{cases} \iff b = 0 \iff Z \in \mathbb{R}$$

- b. En déduire que l'expression $z^2 + z + 1$ est réelle si et seulement si $(\overline{z} - z)(\overline{z} + z + 1) = 0$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} & z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \\ \iff & \overline{z^2 + z + 1} = z^2 + z + 1 \\ \iff & \overline{z}^2 + \overline{z} + 1 = z^2 + z + 1 \\ \iff & \overline{z}^2 - z^2 + \overline{z} - z = 0 \\ \iff & (\overline{z} - z)(\overline{z} + z) + \overline{z} - z = 0 \\ \iff & (\overline{z} - z)(\overline{z} + z + 1) = 0 \end{aligned}$$

- c. En déduire les valeurs du nombre complexe z pour lesquelles l'expression $\sqrt{z^2 + z + 1}$ est définie.

On sait que la racine carrée est définie si et seulement si son argument appartient à $\mathbb{R}^+$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \\ \iff & (\overline{z} - z)(\overline{z} + z + 1) = 0 \\ \iff & \overline{z} = z \quad \text{et} \quad \overline{z} + z = -1 \\ \iff & z \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous avons vu que si z est réel alors $z^2 + z + 1$ est positif.

Si $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, alors $z = -\frac{1}{2} + ib, b \in \mathbb{R}$.

Dès lors :

$$z^2 + z + 1 = \frac{1}{4} - b^2 - ib - \frac{1}{2} + ib + 1 = \frac{3}{4} - b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - b\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + b\right)$$

A l'aide de la règle du signe d'un produit on en déduit que dans ce cas, $z^2 + z + 1$ est positif si et seulement si $b \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Finalement, l'expression $\sqrt{z^2 + z + 1}$ est définie si et seulement si z est réel, ou si z a pour partie réelle $-\frac{1}{2}$ et une partie imaginaire comprise entre $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ inclus.

- d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_{e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)$: $z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{z^2 + z + 1}$.

Si z est réel, alors l'équation n'a pas de solution car le membre de gauche de l'égalité est réel, et celui de droite ne l'est pas.

Nous avons vu que les seules possibilités non réelles sont de la forme $z = -\frac{1}{2} + bi$ avec $b \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} + bi = e^{\frac{3\pi}{4}i} \sqrt{\frac{3}{4} - b^2} \\
 \Rightarrow & \left(bi - \frac{1}{2}\right)^2 = e^{\frac{3\pi}{2}i} \left(\frac{3}{4} - b^2\right) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{4} - b^2 - bi = -i \left(\frac{3}{4} - b^2\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 = 0 \\ b = \frac{3}{4} - b^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2} + b\right) = 0 \\ \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \text{ ou } b = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \text{ ou } b = -\frac{3}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La condition $b = \frac{1}{2}$ est nécessaire, mais nous n'avons pas établi qu'elle est suffisante car le passage au carré ci-dessus a entraîné une implication.

Après avoir vérifié que $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, testons si $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ est bien solution de l'équation $(E_{e^{\frac{3\pi}{4}i}})$ en calculant :

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{3\pi}{4}i} \sqrt{z_0^2 + z_0 + 1} &= e^{\frac{3\pi}{4}i} \sqrt{\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = z_0.
 \end{aligned}$$

on en conclut :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}.$$

~