Test 3 de mathématique

Semaine 5

Proposition de corrigé

Exercice 1 – Formules de trigonométrie

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1. En écrivant sous la forme d'un produit le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$, déterminer les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction des cosinus et sinus de a et de b.
On a, par propriété de l'exponentielle : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.
Donc, par définition de l'exponentielle d'un imaginaire pur :

$$\begin{aligned}\cos(a+b)+\mathrm{i}\sin(a+b)&=\big(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a)\big)\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big)\\&=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\mathrm{i}(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b))\end{aligned}$$

D'où, par identification des parties réelle et imaginaire de chaque membre de l'égalité :

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\quad\text{et}\quad\boxed{\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}.$$

2. En déduire une expression de $\sin(2a)$ et trois expressions de $\cos(2a)$.
Dans le cas particulier où $b=a$ on obtient :

$$\sin(a+a)=\sin(a)\cos(a)+\cos(a)\sin(a)$$

soit :

$$\boxed{\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)}$$

De même :

$$\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)$$

soit :

$$\boxed{\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)}$$

Mais on sait que pour tout réel a : $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$,
donc $\cos^2(a)=1-\sin^2(a)$ et $\sin^2(a)=1-\cos^2(a)$.
En remplaçant $\cos^2(a)$ par son expression en fonction de $\sin^2(a)$ on obtient :

$$\cos(2a)=1-\sin^2(a)-\sin^2(a)\qquad\text{donc}\qquad\boxed{\cos(2a)=1-2\sin^2(a)}.$$

En remplaçant $\sin^2(a)$ par son expression en fonction de $\cos^2(a)$ on obtient :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))\qquad\text{donc}\qquad\boxed{\cos(2a)=2\cos^2(a)-1}.$$

3. Déduire, à partir des formules obtenues à la question **1.**, une expression de $\cos(a-b)$ et de $\sin(a-b)$ en fonction des cosinus et sinus de a et de b.

En remplaçant b par $-b$ dans les formules d'addition on écrit :

$$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)$$

Or $\cos(-b) = \cos(b)$ car la fonction cosinus est paire,
et $\sin(-b) = -\sin(b)$ car la fonction sinus est impaire.
On en déduit :

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

En outre :

$$\sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)$$

On en déduit de même :

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$$

4. Déduire des questions **1.** et **3.** les formules de linéarisation des produits : $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$.

En additionnant membre à membre les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ on écrit :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

d'où :

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)}$$

De même, en soustrayant membre à membre les deux mêmes formules on écrit :

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

d'où :

$$\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)}$$

Enfin, en additionnant membre à membre les formules donnant $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ on écrit :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

d'où :

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)}$$

Exercice 2 – Linéarisation

Linéariser l'expression $A = \cos^3(a)\sin^2(a)$.

Remarque : Plusieurs stratégies sont possibles, la plus directe semble la suivante.

$$A = \cos^3(a) - \cos^5(a)$$

D'après la formule d'Euler et celle du binôme de Newton on a :

$$\begin{aligned}
\cos^5(a) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{5ia} + 5\mathrm{e}^{4ia}\mathrm{e}^{-ia} + 10\mathrm{e}^{3ia}\mathrm{e}^{-2ia} + 10\mathrm{e}^{2ia}\mathrm{e}^{-3ia} + 5\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{-4\,ia} + \mathrm{e}^{5ia}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\frac{\mathrm{e}^{5ia}+\mathrm{e}^{-5ia}}{2} + 5\frac{\mathrm{e}^{3ia}+\mathrm{e}^{-3ia}}{2} + 10\frac{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16}\cos(5a) + \frac{5}{16}\cos(3a) + \frac{5}{8}\cos(a)
\end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^3(a) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2^3}\left(\mathrm{e}^{3ia} + 3\mathrm{e}^{2ia}\mathrm{e}^{-ia} + 3\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{-2\,ia} + \mathrm{e}^{-3ia}\right) \\
&= \frac{1}{2^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3ia}+\mathrm{e}^{-3ia}}{2} + 3\frac{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3a) + \frac{3}{4}\cos(a)
\end{aligned}$$

D'où enfin :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}\cos(3a) + \frac{3}{4}\cos(a) - \left(\frac{1}{16}\cos(5a) + \frac{5}{16}\cos(3a) + \frac{5}{8}\cos(a)\right) \\
A &= -\frac{1}{16}\cos(5a) - \frac{1}{16}\cos(3a) + \frac{1}{8}\cos(a)
\end{aligned}$$

Autre méthode : On a : $A = \big(\cos(a)\sin(a)\big)^2\cos(a)$.
Or $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$ *donc :* $A = \frac{1}{4}\sin^2(2a)\cos(a)$.
Mais on sait que pour tout réel θ *:* $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$. *Donc* $\sin^2(2a) = \frac{1}{2}(1-\cos(4a))$.
D'où :

$$A = \frac{1}{8}(1-\cos(4a))\cos(a) = \frac{1}{8}\cos(a) - \frac{1}{8}\cos(4a)\cos(a).$$

Or : $\cos(4a)\cos(a) = \frac{1}{2}\big(\cos(4a+a)+\cos(4a-a)\big) = \frac{1}{2}\cos(5a) + \frac{1}{2}\cos(3a)$.
Donc finalement :

$$A = \frac{1}{8}\cos(a) - \frac{1}{16}\cos(5a) - \frac{1}{16}\cos(3a)$$

Exercice 3 – Racines carrées

Déterminer les racines carrées de $A = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et de $B = 5 - 3\mathrm{i}$.
Les racines carrées de A sont les solutions de l'équation : $z^2 = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
En notant $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ une écriture exponentielle d'une solution on a :

$$\left(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \iff \rho^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 3\,e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases}\rho^2 = 3\\ 2\theta \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = \sqrt{3}\\ \theta \equiv \dfrac{5\pi}{12}[\pi]\end{cases}$$

Les racines carrées de A sont donc :

$$a = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}-\pi\right)} = -\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}} = -a\left(= \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\mathrm{i}\pi}{12}}\right).$$

<u>Autre méthode</u> : Soit $a = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$. *On a :* $a^2 = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}\right)^2 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
Donc a *est une racine carrée de* A.
On sait que A *possède une seconde racine carrée qui est* $-a = -\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$.

Les racines carrées de B sont les deux solutions de l'équation : $z^2 = 5 - 3\mathrm{i}$.
Soit $b = x + \mathrm{i}y$ l'écriture algébrique d'une racine de B.
Alors on a : $b^2 = 5 - 3\mathrm{i}$ et donc $|b|^2 = |5 - 3\mathrm{i}|$.
D'où le système vérifié par les réels x et y :

$$\begin{cases}(x+\mathrm{i}y)^2 = 5 - 3\mathrm{i}\\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2+3^2}\end{cases} \iff \begin{cases}x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = 5 - 3\mathrm{i}\\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2+3^2}\end{cases} \iff \begin{cases}x^2 - y^2 = 5\\ 2xy = -3\\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2+3^2}\end{cases}$$

Soit enfin : $\begin{cases}x^2 - y^2 = 5\\ x^2 + y^2 = \sqrt{34}\\ xy < 0\end{cases}$.

En additionnant terme à terme les deux premières équations on obtient :

$$2x^2 = 5 + \sqrt{34} \iff x^2 = \frac{5+\sqrt{34}}{2}.$$

En soustrayant terme à terme les deux premières équations on obtient :

$$2y^2 = \sqrt{34} - 5 \iff y^2 = \frac{\sqrt{34}-5}{2}.$$

L'inéquation impose que x et y soient de signes différents. On en déduit les deux racines carrées de $B = 5 - 3\mathrm{i}$:

$$b = \sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}} \quad \text{et son opposé :} \quad -b = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{34}-5}{2}}$$

Exercice 4 – Équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $z^2+3z+3=0$
Calculons le discriminant du trinôme : $\Delta = 3^2-4\times 3 = -3 = \left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^2$.
Le trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1}.$$

D'où :

$$\boxed{S = \left\{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

2. $z^3 = 1+\mathrm{i}$
On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Soit $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ une écriture exponentielle de z.
L'équation s'écrit alors :

$$\left(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \iff \rho^3\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\iff \begin{cases}\rho^3 = \sqrt{2}\\ 3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases}\rho = \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}}\\ \theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$$

Les valeurs possibles de l'angle θ sont donc :

$$\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Pour $k=0$ on obtient : $\theta = \frac{\pi}{12}$.
Pour $k=1$ on obtient :

$$\theta = \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}.$$

Pour $k=-1$ on obtient :

$$\theta = \frac{\pi}{12}-\frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Toutes les autres valeurs possibles de k sont congrues à 0, 1 ou -1 modulo 3, et fourniront donc des valeurs de θ congrues modulo 2π aux trois valeurs déjà obtenues. On en déduit :

$$S = \left\{\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\ ,\ \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\ ,\ \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}\right\}$$

Remarque : On peut, pour se rassurer à peu de frais, vérifier que les trois solutions sont solution de l'équation initiale.

3. $\mathrm{i}z^2+(4-\mathrm{i})z-3(1+\mathrm{i})=0$
Calculons le discriminant du trinôme :

$$\begin{aligned}\Delta &= (4-\mathrm{i})^2-4\times\mathrm{i}\times(-3(1+\mathrm{i}))\\ &= 16-1-8\mathrm{i}+12\mathrm{i}(1+\mathrm{i})\\ &= 15-8\mathrm{i}+12\mathrm{i}-12 = 3+4\mathrm{i}\end{aligned}$$

On observe que

$$(2+\mathrm{i})^2 = 2^2-1+2\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}.$$

Remarque : Si on ne reconnaît pas ce carré, on peut appliquer la méthode classique :
Soit $\delta = a+ib$ une racine de Δ.
On a alors :

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\\ ab>0\end{cases} \iff \begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\\ ab>0\end{cases}$$

$$\iff \quad (a,b)\in\{(2,1),(-2,-1)\}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-(4-\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{-6}{2\mathrm{i}} = 3\mathrm{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-(4-\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}.$$

D'où :

$$\boxed{S = \{3\mathrm{i}\ ,\ 1+\mathrm{i}\}}$$

4. $\mathrm{i}z^3+(2+\mathrm{i})z^2+(\mathrm{i}-4)z+2-3\mathrm{i}=0$
On observe que 1 est une racine du polynôme. L'équation est donc équivalente à :

$$(z-1)\left(\mathrm{i}z^2+(2+2\mathrm{i})z-2+3\mathrm{i}\right)=0$$

Le discriminant du trinôme est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2+2\mathrm{i})^2-4\times\mathrm{i}\times(-2+3\mathrm{i})\\ &= 4-4+8\mathrm{i}+8\mathrm{i}+12\\ &= 12+16\mathrm{i} = 4(3+4\mathrm{i})\end{aligned}$$

On observe que ce discriminant est quatre fois celui de la question précédente, il est donc le carré de

$$2(2+\mathrm{i}) = 4+2\mathrm{i}.$$

Les racines du trinôme sont donc :

$$z_1 = \frac{-(2+2\mathrm{i})-(4+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{-6-4i}{2\mathrm{i}} = -2+3\mathrm{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-(2+2\mathrm{i})+(4+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{2}{2\mathrm{i}} = -\mathrm{i}.$$

D'où l'ensemble solution de l'équation :

$$\boxed{S = \{1\ ,\ -i\ ,\ -2+3\mathrm{i}\}}$$

$\sim$