DS 2 de mathématique

PROPOSITION DE CORRIGÉ *(avec commentaires)*

Exercice

1. Donner, sans justification, les formes trigonométriques de

a. $-3i$ $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

b. -4 $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

c. $1+\sqrt{3}i$ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

d. $i-1$ $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

2. Déterminer les racines carrées de $1+i$.

On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

D'après les propriétés de racines carrées on sait que le nombre

$$\sqrt{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$$

et son opposé sont les racines carrées de $1+\mathrm{i}$, c'est à dire :

$$\boxed{\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}} \quad \text{et} \quad \boxed{-\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}}.$$

Autre méthode : Soit $x+\mathrm{i}y$ la forme algébrique d'une racine carrée de $1+\mathrm{i}$.
On a alors :

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=\sqrt{2} \\ xy>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=1+\sqrt{2} \\ 2y^2=\sqrt{2}-1 \\ xy>0 \end{cases}$$

$$\iff \quad (x,y) \in \left\{ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \right\}$$

Les racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont donc les nombres :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \textit{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Remarque :
Les deux méthodes permettent d'obtenir les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{8}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \mathrm{i}$.

On a : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

Donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ est une solution de l'équation.

En multipliant cette solution par chacune des racines quatrièmes de l'unité on obtient l'ensemble des solutions de l'équation :

$$S = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{8}}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}\right\}$$

Autre méthode : Soit $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ une écriture exponentielle de z. Dès lors :

$$z^4 = \mathrm{i} \iff \rho^4\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 4\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On en déduit : $S = ...$

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Recopier et compléter

a. $\cos(a) + \cos(b) = \dots$

b. $\cos(a)\cos(b) = \dots$

c. $\tan(a + b) = \dots$

d. $\tan(2a) = \dots$

a. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

b. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

c. $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

avec la condition que a, b, et $a + b$ ne soient pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

d. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ *avec la condition que a ne soit pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{\pi}{2}$.*

Problème – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$

1. Donner (sans justification) les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

$\cos(\pi) = -1$
$\sin(\pi) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Ce problème vise à déterminer une expression des valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{5}$.

2. Racines cinquièmes de l'unité

a. Donner l'ensemble solution de l'équation d'inconnue complexe : $z^5 = 1$.
(on pourra utiliser directement un résultat de cours)
L'ensemble des solutions de cette équation est constitué, par définition, des racines cinquièmes de l'unité :

$$S = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k \in [\![0, 5[\![\right\}$$

Autre méthode : *Soit $\rho e^{i\theta}$ une écriture exponentielle de z. Dès lors :*

$$z^5 = 1 \iff \rho^5 e^{5i\theta} = e^{0i} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 5\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{cases}$$

On en déduit :

$$S = \left\{ 1\ ,\ e^{i\frac{2\pi}{5}}\ ,\ e^{i\frac{4\pi}{5}}\ ,\ e^{-i\frac{2\pi}{5}}\ ,\ e^{-i\frac{4\pi}{5}} \right\}$$

b. Rappeler les trois formules de duplication pour le cosinus, puis exprimer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
Pour tout réel a : $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
En particulier :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

c. En utilisant le résultat du cours sur la somme des racines cinquièmes de l'unité, montrer que le nombre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
On sait que la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité vaut zéro, ce qui donne pour $n = 5$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} = 0$$

En identifiant les parties réelles on obtient :

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

Puis par parité de la fonction cosinus :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

Enfin, en remplaçant $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ par l'expression trouvée à la question **b.** :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) = 0$$

En posant $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ on obtient la condition :

$$1 + 2x + 2(2x^2 - 1) = 0 \quad \iff \quad 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

3. Cosinus de $\frac{2\pi}{5}$

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 2^2 - 4\times 4\times(-1) = 4+16 = 20 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2\times 5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

b. En déduire : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

La solution x_1 est négative, or $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geqslant 0$.
On en déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

4. Sinus de $\frac{2\pi}{5}$

a. Justifier que le résultat du cours sur la somme des racines cinquièmes de l'unité ne nous permet pas de déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Le nombre $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ intervient en identifiant les parties imaginaires de l'équation complexe obtenue à la question **1.c.** :

$$0 + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

L'imparité de la fonction sinus entraîne des simplifications qui font disparaître toute condition sur $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On ne peut donc déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ par ce moyen.

b. Montrer : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

On sait que : $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$, donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - \left(6 - 2\sqrt{5}\right)}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$$

5. Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$.

On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

a. A l'aide de la formule de factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié, donner une écriture factorisée de z.

On a :

$$z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{0i} + e^{i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{0-\frac{2\pi}{5}}{2}\right)e^{i\frac{0+\frac{2\pi}{5}}{2}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Remarque : Il s'agit même de l'écriture exponentielle de z.

b. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est la moitié du module de z.

Les modules de deux nombres complexes égaux sont égaux donc :

$$|z| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = |2|\left|\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|\left|e^{i\frac{\pi}{5}}\right|$$

Or $e^{i\frac{\pi}{5}} \in \mathbb{U}$ donc $\left|e^{i\frac{\pi}{5}}\right| = 1$.

De plus : $\frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et $\left|\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On en déduit :

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{soit} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}|z|.$$

c. A l'aide des résultats précédents, déterminer une expression de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On a :

$$z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{8}\\
&= 1 + \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{1}{16}\left(16+5+1-2\sqrt{5}+8\sqrt{5}-8+10+2\sqrt{5}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}}$$

d. Calculer $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$. En déduire une écriture plus simple de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On a : $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 1+5+2\sqrt{5} = 2(\sqrt{5}+3)$.

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+3)}{16}} = \frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$.

e. Déterminer une expression de la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On a :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1-\frac{\sqrt{5}+3}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Et parce que le sinus de $\frac{\pi}{5}$ est positif :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$$

6. Un peu de géométrie

On nomme I, A et B les points du plan complexe d'affixes respectives 1, $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$. On utilisera les nombres complexes pour répondre aux questions.

a. Déterminer la distance IA.

On a : $IA = |a-1| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}-1\right|$.

D'après factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié on obtient :

$$IA = \left|2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

b. Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAB}$, qui est la valeur absolue de la mesure principale de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)$.

On a :

$$\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\frac{b-a}{1-a}\right)$$

Or

$$\frac{b-a}{1-a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}} = \frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}}{2\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}.$$

On obtient donc : $\boxed{\widehat{IAB} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad} = 108°}$

c. Déterminer la fonction complexe associée à la rotation de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)$.

C'est la fonction qui à tout complexe z associe

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}(z-a)+a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}.$$

∼