

DS 2 de mathématique

Exercice

1. Donner, sans justification, les formes trigonométriques de

a. $-3i$

b. -4

c. $1 + \sqrt{3}i$

d. $i - 1$

2. Déterminer les racines carrées de $1 + i$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Recopier et compléter

a. $\cos(a) + \cos(b) = \dots$

c. $\tan(a + b) = \dots$

b. $\cos(a) \cos(b) = \dots$

d. $\tan(2a) = \dots$

Problème – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$

1. Donner (sans justification) les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres π , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

Ce problème vise à déterminer une expression des valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{5}$.

2. Racines cinquièmes de l'unité

a. Donner l'ensemble solution de l'équation d'inconnue complexe : $z^5 = 1$.
(on pourra utiliser directement un résultat de cours)

b. Rappeler les trois formules de duplication pour le cosinus, puis exprimer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

c. En utilisant le résultat du cours sur la somme des racines cinquièmes de l'unité, montrer que le nombre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. Cosinus de $\frac{2\pi}{5}$

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

b. En déduire : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

4. Sinus de $\frac{2\pi}{5}$

a. Justifier que le résultat du cours sur la somme des racines cinquièmes de l'unité ne nous permet pas de déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

b. Montrer : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

5. Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$.

On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

a. A l'aide de la formule de factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié, donner une écriture factorisée de z .

b. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est la moitié du module de z .

c. A l'aide des résultats précédents, déterminer une expression de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

d. Calculer $(1 + \sqrt{5})^2$. En déduire une écriture plus simple de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

e. Déterminer une expression de la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

6. Un peu de géométrie

On nomme I , A et B les points du plan complexe d'affixes respectives 1, $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $b = e^{i\frac{4\pi}{5}}$. On utilisera les nombres complexes pour répondre aux questions.

a. Déterminer la distance IA .

b. Déterminer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAB}$, qui est la valeur absolue de la mesure principale de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.

c. Déterminer la fonction complexe associée à la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.

~