

---

# Interrogations orales semaine 24

---

*Pour le mardi 24 mars*

## Programme de cours

### Chapitre 17 : Polynômes

- ▶ Structure algébrique de  $\mathbb{K}[X]$
- ▶ Divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$ 
  - Relation de divisibilité
  - Division euclidienne
- ▶ Racines d'un polynôme
  - Racines et multiplicités
  - Factorisation par les racines
  - Factorisation par des racines multiples
  - Polynômes scindés
  - Multiplicité des racines et dérivée
  - Somme et produit des racines d'un polynôme
- ▶ Factorisation en produits d'irréductibles
  - Polynômes irréductibles de  $\mathbb{K}[X]$
  - Factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$
  - Factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$

### Chapitre 18 : Applications linéaires

- ▶ Applications linéaires
  - Définitions et premiers exemples
  - Opérations sur les applications linéaires
- ▶ Image et noyau d'une application linéaire

## Questions de cours

### Question 1 : Supplémentarité dans $\mathbb{R}^3$

Soit  $F = \{(a, a, a) ; a \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0\}$ .

Justifier que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  qui sont supplémentaires.

(Chapitre 16 Exercice 1)

### Question 2 : Dérivées d'un produit

Exprimer en fonction des dérivées successives de  $P$  celles de  $(X^2 + 5X - 2) \times P$ .

(Chapitre 17 Exercice 4)

### Question 3 : Division euclidienne de polynômes

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de

$$A = X^4 - 5X^3 + 6X - 2 \quad \text{par} \quad B = X^2 - 2.$$

(Chapitre 17 Exercice 6)

### Question 4 : Nombre de racines d'un polynôme

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) = n^3 + 2n^2 + n$ .

Montrer que  $P = X^3 + 2X^2 + X$

(Chapitre 17 Exercice 9)

### Question 5 : Endomorphisme nilpotent et groupe linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $f$  est nilpotent d'ordre  $n$ .

Montrer que  $\text{id}_E - f \in \text{GL}(E)$ .

(Chapitre 18 Exercice 4)

### Question 6 : Caractérisation des applications linéaires injectives

Énoncer et démontrer ce théorème

(Chapitre 18 Théorème 6)

### Question 7 : Détermination de l'image d'une application linéaire.

Soit  $\Delta : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'application qui à tout polynôme  $P$  associe le polynôme :

$$\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$$

1. Justifier que  $\Delta$  est une application linéaire.
2. Déterminer  $\text{Im}(\Delta)$ .

(Chapitre 18 Exercice 5)

## Partie exercices

### Chapitre 17

- ▶ Déterminer des combinaisons linéaires, produits, dérivées et composées de polynômes
- ▶ Espace vectoriel des polynômes et ses sous-espaces (déterminer si un sous-ensemble de  $\mathbb{K}[X]$  est un sous-espace vectoriel, en donner éventuellement une base et la dimension, décomposer un polynôme dans une base donnée)
- ▶ Équations à inconnue polynôme
- ▶ Division euclidienne de polynômes
- ▶ Décomposition de polynôme en produit de facteurs de plus bas degré dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$
- ▶ Utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes
- ▶ Savoir utiliser la dérivation pour caractériser les racines multiples
- ▶ Tout exercice mettant en œuvre les connaissances du cours

### Chapitre 18

- ▶ Déterminer si des applications
  - sont linéaires : caractérisation, matrice canoniquement associée
  - ne le sont pas
    - ⊙ l'image du vecteur nul de l'espace vectoriel de départ n'est pas le vecteur nul de l'espace vectoriel d'arrivée
    - ⊙ ou contre exemple pour établir que l'image d'une somme de vecteurs n'est pas toujours la somme des images
    - ⊙ ou contre exemple pour établir que l'image d'un vecteur multiplié par un scalaire n'est pas toujours ce scalaire multiplié par l'image du vecteur
- ▶ Déterminer une base du noyau et/ou de l'image d'une application linéaire
- ▶ Tout exercice mettant en œuvre les connaissances du cours

~