DM 2 de mathématique

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Chacun travaillera, en fonction de ses objectifs, une partie (éventuellement vide) des trois catégories d'exercices :

- *entraînement, consolidation des bases ;*
- *coeur de cible ;*
- *approfondissement, exploration, recherche.*

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1 – Autour des coefficients binomiaux

Soit p un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \binom{3p+1}{2p+1}$$

1. Énoncer la relation de Pascal et la propriété de symétrie entre les coefficients binomiaux.

2. Prouver que pour tout $k \in [\![0, 3p]\!]$,

$$\binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p} - \binom{k}{p}$$

3. Terminer la preuve.

Exercice 2 – Divers

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. Prouver que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. On donnera une forme simplifiée du résultat.

3. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est-elle injective ? surjective ?
Justifier soigneusement votre réponse.

4. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+3 \end{array}$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

5. Dessiner une allure des représentations graphiques des fonctions suivantes (aucune justification n'est attendue) :

a. $x \mapsto \sqrt{x}$
b. $\cos$
c. $x \mapsto x^3$
d. $\ln$
e. $\exp$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner les définitions suivantes :

a. l'image de f
b. une partie stable par f
c. f est injective

7. Énoncer l'identité géométrique et la formule du binôme de Newton.

Coeur de cible

Exercice 3 – Symétries d'un graphe

L'objectif principal de cet exercice est d'étudier la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^2(x) \end{array}$ après en avoir réduit l'intervalle d'étude à l'aide de symétries.

1. Considérations préliminaires

- **a.** Montrer que la fonction f est bornée.
- **b.** Montrer que f possède un maximum et un minimum et déterminer les points où ces deux extremums sont atteints.

2. Symétries standard

- **a.** Montrer que f est une fonction paire. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.
- **b.** Montrer que de f est périodique de période 2π. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.
- **c.** Montrer que de f est périodique de période π. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

3. Symétrie non standard

On considère la fonction : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2} \end{array}$.

- **a.** Montrer que g est une fonction impaire.
- **b.** En déduire, à l'aide des effets d'une transformation sur un graphe, un centre de symétrie du graphe Γ de la fonction f.
- **c.** En déduire une ultime réduction I de l'intervalle d'étude de la fonction f.

4. Étude de f sur l'intervalle restreint

- **a.** Justifier de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I obtenu à la question **3.c**.
- **b.** Déterminer une expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
- **c.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur I de deux façons différentes.
- **d.** Établir le tableau de variation de la fonction f sur I.

5. En explicitant les symétries, déterminer le comportement de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6. Fonction réciproque

On considère la restriction $f_|$ de la fonction f à l'intervalle $J = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- **a.** Montrer que $f_|$ réalise une bijection de J vers un intervalle K que l'on précisera.
- **b.** Pour tout x de K, exprimer son image $f_|^{-1}(x)$ par la bijection réciproque de $f_|$.
- **c.** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f_|^{-1}$.
- **d.** Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de $f_|^{-1}$, exprimer $f_|^{-1\prime}(x)$.

Exercice 4 – Fonction argument sinus hyperbolique

1. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Dans toute la suite, on note Argsh sa bijection réciproque.

2. **a.** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} - \frac{3}{2}e^{x} - 1 = 0.$$

b. En déduire la valeur de $\operatorname{Argsh}\left(\frac{3}{4}\right)$.

3. Déterminer les variations de la fonction Argsh.

4. Soit un réel x.

a. Montrer que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

b. En déduire que $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

5. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Approfondissement, exploration, recherche

Exercice 5 – Sommes trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose : $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

a. Calculer $C_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $S_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = C_n(x) + i\, S_n(x)$.

c. En utilisant la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique et la factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié, donner une expression de $C_n(x)$ et de $S_n(x)$. (*On pourra être amené à traiter séparément un cas particulier trivial.*)
On testera le résultat obtenu en considérant $C_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $S_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

d. En déduire, pour tout réel a : $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx)$.
(*on pourra utiliser les formules trigonométriques d'addition*)

2. On pose : $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

a. Calculer $T_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $U_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $U_n(\pi)$ et, pour $n \in [\![0,2]\!]$, $T_n(\pi)$.

b. Calculer $T_n(x)$ et $U_n(x)$.

Exercice 6 *– Recherche de fonction réciproque

On cherche à établir que la fonction f définie par : $\quad f(x) = x\sqrt{\dfrac{x^2+1}{9-x^2}}$

réalise une bijection vers $\mathbb{R}$, et à déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

2. Sens de variation sans détermination de la fonction dérivée de f.

a. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$g(x) = \frac{x^2+1}{9-x^2}.$$

b. En déduire les variations de la fonction $\sqrt{g}$ sur $\mathscr{D}_f$.

c. Ces résultats permettent-ils de déterminer les variations de la fonction f sur son domaine de définition ?

d. Étudier la parité de la fonction f.

e. Déterminer les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

3. Sens de variation par la détermination de la fonction dérivée de f.

a. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$.

4. Justifier que la fonction f réalise une bijection de l'ensemble $\mathscr{D}_f$ vers $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f.

$\sim$