

DM 2 de mathématique

Ce devoir de maison est à rédiger sur copie avec la même présentation qu'un devoir surveillé. On accordera un soin particulier à la rigueur de rédaction.

Chacun travaillera, en fonction de ses objectifs, une partie (éventuellement vide) des trois catégories d'exercices :

- ▶ entraînement, consolidation des bases ;
- ▶ coeur de cible ;
- ▶ approfondissement, exploration, recherche.

Entraînement, consolidation des bases

Exercice 1 – Autour des coefficients binomiaux

Soit p un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \binom{3p+1}{2p+1}$$

On peut remarquer d'emblée que les $p-1$ premiers termes de cette somme seront nuls car $p-1 > k$.

Il s'agit de démontrer que la somme des premiers coefficients du triangle de Pascal dans une colonne est égale à l'un des coefficients du triangle.

1. Énoncer la relation de Pascal et la propriété de symétrie entre les coefficients binomiaux.

Pour tout couple d'entiers naturels n et k :

Relation de Pascal :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Propriété de symétrie des coefficients binomiaux :
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Remarque : *On n'oublie pas les cas de nullité des coefficients binomiaux qui nous évite de poser des conditions sur les entiers naturels n et k .*

2. Prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, 3p \rrbracket$,

$$\binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p} - \binom{k}{p}$$

D'après la relation de Pascal :

$$\binom{k+1}{p} = \binom{k}{p} + \binom{k}{p-1}. \quad \text{On a donc bien :} \quad \binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p} - \binom{k}{p}.$$

3. Terminer la preuve.

On a, d'après la relation de Pascal puis la symétrie :

Rédaction avec les petits points :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} &= \sum_{k=0}^{3p} \left(\binom{k+1}{p} - \binom{k}{p} \right) \\ &= \binom{1}{p} - \binom{0}{p} + \binom{2}{p} - \binom{1}{p} + \binom{3}{p} - \binom{2}{p} + \dots + \binom{3p+1}{p} - \binom{3p}{p} \\ &= -0 + \binom{3p+1}{p} = \binom{3p+1}{3p+1-p} = \binom{3p+1}{2p+1} \end{aligned}$$

Rédaction avec la relation de Chasles et un décalage d'indice :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} &= \sum_{k=0}^{3p} \left(\binom{k+1}{p} - \binom{k}{p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{3p} \binom{k+1}{p} - \sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p} \\ &= \sum_{k=1}^{3p} \binom{k}{p} + \binom{3p+1}{p} - \left(\binom{0}{p} + \sum_{k=1}^{3p} \binom{k}{p} \right) \\ &= \binom{3p+1}{p} - 0 = \binom{3p+1}{3p+1-p} = \binom{3p+1}{2p+1} \end{aligned}$$

Exercice 2 – Divers

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. Prouver que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

Remarque : Si $p > n$, l'égalité est également vraie puisque équivalente à $0 = 0$.

D'après la définition des coefficients binomiaux :

$$\frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$. On donnera une forme simplifiée du résultat.

Si x est un multiple de 2π , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ le nombre kx l'est aussi, et donc $\cos(kx) = 1$. On en déduit que dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

Si x n'est pas un multiple de 2π alors on a :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left(e^{i(kx)} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)$$

d'après la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Remarque : On pourrait séparer partie réelle et imaginaire du numérateur et du dénominateur, puis multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, mais il y a mieux :

D'après la formule de la factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié on a :

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) e^{i\frac{n+1}{2}x}}{2i \sin\left(\frac{1}{2}x\right) e^{i\frac{1}{2}x}} = \frac{\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{in\frac{x}{2}}.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(n\frac{x}{2}\right).$$

Remarque : Un tel résultat mérite d'être testé avec $x = \pi \dots$

3. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

$$x \mapsto x^2$$

Justifier soigneusement votre réponse.

Le nombre 4 est l'image de 2 et de -2 par f , la fonction f n'est donc pas injective.

Le nombre -1 n'a pas d'antécédent par f , la fonction f n'est donc pas surjective.

4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque.
- $$x \longmapsto 2x + 3$$

Remarque : On pourrait utiliser des arguments d'analyse : continuité, stricte croissance et limites en $-\infty$ et en $+\infty$, mais l'algèbre nous donne une méthode préférable.

Pour tout réel y on a les équivalences :

$$y = 2x + 3 \iff 2x = y - 3 \iff x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

Ainsi tout élément y de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ possède un unique antécédent x dans l'ensemble de départ, image de y par la fonction affine de coefficient $\frac{1}{2}$ et de terme constant (ordonnée à l'origine) $-\frac{3}{2}$.

La fonction f est donc bien bijective, et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

5. Dessiner une allure des représentations graphiques des fonctions suivantes (aucune justification n'est attendue) :

a. $x \mapsto \sqrt{x}$

c. $x \mapsto x^3$

e. $\exp$

b. $\cos$

d. $\ln$

6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner les définitions suivantes :

- a. l'image de f

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

Dit autrement :

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

- b. une partie stable par f

Une partie K de $\mathcal{D}_f$ telle que $f(K) \subset K$.

- c. f est injective

Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent.

Dit autrement :

$$\forall (x, x') \in \mathcal{D}_f^2, \\ f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

7. Énoncer l'identité géométrique et la formule du binôme de Newton.

Identité géométrique :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

$$= (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

$$= (a - b) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k}$$

Formule du binôme de NEWTON :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Coeur de cible

Exercice 3 – Symétries d'un graphe

L'objectif principal de cet exercice est d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \cos^2(x)$ après en avoir réduit l'intervalle d'étude à l'aide de symétries.

1. Considérations préliminaires

- a. Montrer que la fonction f est bornée.

On sait que la fonction cosinus est bornée par -1 et 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq |\cos(x)| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (\cos(x))^2 \leq 1$$

La fonction f est donc bornée par 0 et 1 .

- b. Montrer que f possède un maximum et un minimum et déterminer les points où ces deux extremums sont atteints.

On a :

$$\cos^2(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\cos(x)| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x) \in \{-1, 1\} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

On sait d'après la question précédente que la fonction f est majorée par 1 .

Ce majorant est atteint exclusivement en $x \equiv 0[\pi]$.

De même :

$$\cos^2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On sait d'après la question précédente que la fonction f est minorée par 0 .

Ce minorant est atteint exclusivement en $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

2. Symétries standard

- a. Montrer que f est une fonction paire. En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine.

En outre, pour tout réel x on a : $f(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2(x) = f(x)$.

La fonction f est donc paire.

On peut dès lors réduire l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+$.

Remarque : $\mathbb{R}_-$ serait possible, mais contreviendrait au soucis de simplicité..

- b. Montrer que f est périodique de période 2π . En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

Pour tout réel x on a : $f(x + 2\pi) = \cos^2(x + 2\pi) = \cos^2(x) = f(x)$.

La fonction f est donc périodique de période 2π .

On peut dès lors réduire l'étude à tout intervalle de largeur 2π .

Si l'on choisit l'intervalle $] - \pi, \pi]$, la parité établie à la question précédente nous permet une plus grande réduction : $[0, \pi]$.

- c. Montrer que f est périodique de période π . En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.

Pour tout réel x on a : $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (-\cos(x))^2 = f(x)$.

La fonction f est donc périodique de période π .

On peut dès lors réduire l'étude à l'intervalle : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Symétrie non standard

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- a. Montrer que g est une fonction impaire.

L'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à l'origine.

En outre, pour tout réel x , d'après les formules de linéarisation :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

dès lors :

$$g(-x) = \frac{1}{2} \cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

par parité de la fonction cosinus.

Enfin, par symétrie du cercle trigonométrique :

$$g(-x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -g(x)$$

La fonction g est donc bien impaire.

- b. En déduire, à l'aide des effets d'une transformation sur un graphe, un centre de symétrie du graphe Γ de la fonction f .

La fonction g étant impaire, son graphe admet l'origine O pour centre de symétrie.

Or, pour tout réel x :

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

D'après l'effet d'une transformation sur un graphe, on sait que le graphe de la fonction $h : x \mapsto f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{4}\vec{i}$.

De même, le graphe de la fonction $g : x \mapsto h(x) - \frac{1}{2}$ est l'image du graphe de h par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$.

On en conclut que le graphe de la fonction g est l'image du graphe Γ de la fonction f par la translation de vecteur $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Or la translation conservant les symétries centrales, on peut affirmer que Γ possède un centre de symétrie qui est l'antécédent de O par la translation de vecteur $\vec{u}$, à savoir le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

- c. En déduire une ultime réduction I de l'intervalle d'étude de la fonction f .

L'intervalle d'étude $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ peut donc encore être réduit à $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Étude de f sur l'intervalle restreint

- a. Justifier de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I obtenu à la question 3.c.

La fonction f est composée de la fonction cosinus et de la fonction carré, qui sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue et dérivable sur I .

- b. Déterminer une expression de la fonction dérivée f' de la fonction f .
 La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = 2 \cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x)$.
- c. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur I de deux façons différentes.

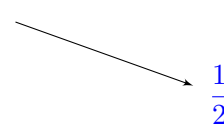
Méthode 1 : La fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Or $\cos(I) \subset \mathbb{R}^+$, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit, d'après le théorème sur le sens de variation des fonctions composées, que la fonction f est décroissante sur I .

Méthode 2 : $\forall x \in I, 2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $f'(x) = -\sin(2x) \leq 0$.
 On en déduit que f est décroissante sur I .

- d. Établir le tableau de variation de la fonction f sur I .

On calcule : $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	1	$\frac{1}{2}$



5. En explicitant les symétries, déterminer le comportement de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Le comportement de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ se déduit par la symétrie de centre le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ d'après la question 3.b.

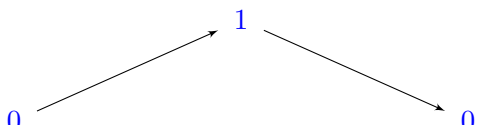
La fonction f est donc décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Le comportement de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ se déduit par la symétrie d'axe (Oy) d'après la question 2.a.

La fonction f est donc croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Enfin, d'après la question 2.c, le comportement de la fonction f sur le reste de l'ensemble $\mathbb{R}$ se déduit par des translations de vecteur $\pi\vec{i}$ et $-\pi\vec{i}$, $\vec{i}$ étant le premier vecteur du repère associé au graphe Γ . Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

x	$k\pi - \frac{\pi}{2}$	$k\pi$	$k\pi + \frac{\pi}{2}$
f	0	1	0



6. Fonction réciproque

On considère la restriction $f|_J$ de la fonction f à l'intervalle $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- a. Montrer que $f|_J$ réalise une bijection de J vers un intervalle K que l'on précisera.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle réalise donc une bijection de J vers $K = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = [0, 1]$.

- b. Pour tout x de K , exprimer son image $f|_J^{-1}(x)$ par la bijection réciproque de $f|_J$.

Soit $x \in K = [0, 1]$ et y son antécédent par $f|_J$.

Alors :

$$f(y) = x \iff \cos^2(y) = x \iff \cos(y) = \sqrt{x} \iff y = \text{Arccos}(\sqrt{x})$$

On a donc : $f|_J^{-1}(x) = \text{Arccos}(\sqrt{x})$.

- c. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f|_J^{-1}$.

La fonction $f|_J$ est continue sur J , donc la fonction $f|_J^{-1}$ est continue sur K .

La fonction $f|_J$ est dérivable et de dérivée non nulle sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $f|_J^{-1}$ est dérivable sur $]0, 1[$.

La dérivée de $f|_J$ est nulle en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, donc son graphe admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses (« *horizontales* ») en ces points. Par symétrie, on en déduit que le graphe de $f|_J^{-1}$ admet des tangentes parallèles à l'axe des ordonnées (« *verticales* ») en 0 et en 1. La fonction $f|_J^{-1}$ n'est donc pas dérivable en 0 ni en 1.

- d. Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de $f|_J^{-1}$, exprimer $f|_J^{-1'}(x)$.

Pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f|_J^{-1'}(x) = \frac{1}{f|_J'(f|_J^{-1}(x))} = \frac{1}{-2 \cos(\text{Arccos}(\sqrt{x})) \sin(\text{Arccos}(\sqrt{x}))} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

On obtient : $f|_J^{-1'}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

Remarque : On vérifie que cette fonction dérivée tend vers l'infini quand x tend vers 0 et vers 1, et qu'elle vaut -1 en $x = \frac{1}{2}$, car $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Exercice 4 – Fonction argument sinus hyperbolique

1. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on note Argsh sa bijection réciproque.

On sait que la fonction sh est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$.

La fonction sh réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. a. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} - \frac{3}{2}e^x - 1 = 0.$$

Pour tout réel x on a :

$$e^{2x} - \frac{3}{2}e^x - 1 = 0 \iff 2(e^x)^2 - 3e^x - 2 = 0$$

Opérons le changement d'inconnue $X = e^x$ et résolvons sur $\mathbb{R}^+$ l'équation polynomiale de degré 2 :

$$2X^2 - 3X - 2 = 0.$$

Son discriminant vaut : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

On a : $X_1 = \frac{-(-3) - 5}{2 \times 2} < 0$ et $X_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2$.

(un oeil exercé aurait pu voir une racine évidente)

L'équation est donc équivalente à $e^x = 2 \iff x = \ln(2)$. D'où : $\mathcal{S} = \{\ln(2)\}$.

- b. En déduire la valeur de $\text{Argsh}\left(\frac{3}{4}\right)$.

On sait d'après la question 1. que cette valeur existe, appelons la y . On a :

$$y = \text{Argsh}\left(\frac{3}{4}\right) \iff \text{sh}(y) = \frac{3}{4} \iff \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{3}{4} \iff e^y - e^{-y} = \frac{3}{2} \iff e^{2y} - \frac{3}{2}e^y - 1 = 0$$

On observe que la valeur recherchée est solution de l'équation résolue à la question

2.. On en conclue :

$$\text{Argsh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(2).$$

Autre méthode : (mathématiquement correcte, moins dans l'esprit de l'exercice)

Calculons :

$$\text{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

On en déduit : $\text{Argsh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(2).$

3. Déterminer les variations de la fonction Argsh.

On sait qu'une fonction bijective et sa réciproque ont même sens de variation, donc la fonction Argsh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit un réel x .

a. Montrer que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Calculons, pour tout réel x :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1.$$

b. En déduire que $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

On en déduit que $\operatorname{ch}^2(x) = 1 + \operatorname{sh}^2(x)$. Comme en outre ch est positive, on en conclut :

$$\operatorname{ch}(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)}.$$

En posant $x = \operatorname{Argsh}(y)$ on obtient : $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(y)) = \sqrt{1+y^2}$.

L'égalité $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ est donc vraie pour tout réel x .

5. Montrer que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

La fonction sh est dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas, donc sa fonction réciproque Argsh est également dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a, d'après la formule de dérivation des fonctions réciproques :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Approfondissement, exploration, recherche

Exercice 5 – Sommes trigonométriques

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose : $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

a. Calculer $C_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $S_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$C_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

et

$$S_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

b. Montrer que $\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = C_n(x) + i S_n(x)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k &= \sum_{k=0}^n (e^{ikx}) \\ &= \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \sin(kx) \quad \text{par linéarité} \\ &= C_n(x) + i S_n(x) \end{aligned}$$

- c. En utilisant la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique et la factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié, donner une expression de $C_n(x)$ et de $S_n(x)$.

(On pourra être amené à traiter séparément un cas particulier trivial.)

On testera le résultat obtenu en considérant $C_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $S_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

La formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique fournit, dans le cas où la raison est différente de 1 :

$$\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Si la raison vaut 1, c'est à dire si $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$: $C_n(x) = n + 1$ et $S_n(x) = 0$.

Remarque : Il s'agit d'identifier les parties réelle et imaginaire de l'expression obtenue.

On pourrait utiliser la formule $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, puis obtenir la partie réelle et la partie imaginaire de cette fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, mais cela conduirait à des calculs lourds et un résultat compliqué. La bonne idée ici est de factoriser le numérateur et le dénominateur

à l'aide de l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) e^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{inx}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\boxed{C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}} \quad \text{et} \quad \boxed{S_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Testons ces deux formules :

$$C_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 1 \quad \text{et} \quad S_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}.$$

- d. En déduire, pour tout réel a : $\sum_{k=0}^n \cos(a + kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(a + kx)$.

(on pourra utiliser les formules trigonométriques d'addition)

Remarque : On voudrait faire apparaître $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ pour utiliser les résultats précédents. On voit qu'en appliquant les formules d'addition ils apparaîtront multipliés par une constante pour la sommation, que l'on pourra factoriser. La voie est tracée.

Traitons tout d'abord la situation triviale qui ne peut être englobée dans le cas général.

Si $x \equiv 0 [2\pi]$, alors par périodicité des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(a + kx) = \cos(a) \quad \text{et} \quad \sin(a + kx) = \sin(a).$$

Dès lors, dans ce cas :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos(a + kx) = (n+1) \cos(a)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^n \sin(a + kx) = (n+1) \sin(a)}.$$

Si $x \not\equiv 0 [2\pi]$, on a : $\cos(a + kx) = \cos(a) \cos(kx) - \sin(a) \sin(kx)$.

D'où, en utilisant la linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(a + kx) &= \cos(a) \sum_{k=0}^n \cos(kx) - \sin(a) \sum_{k=0}^n \sin(kx) \\ &= \cos(a) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \sin(a) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos(a) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) - \sin(a) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

On obtient donc finalement (*et un peu miraculeusement*) :

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kx) = \cos\left(a + \frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En outre on a : $\sin(a + kx) = \sin(a) \cos(kx) + \cos(a) \sin(kx)$.

D'où, en utilisant la linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin(a + kx) &= \sin(a) \sum_{k=0}^n \cos(kx) + \cos(a) \sum_{k=0}^n \sin(kx) \\ &= \sin(a) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos(a) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\sin(a) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \cos(a) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\sum_{k=0}^n \sin(a + kx) = \sin\left(a + \frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. On pose : $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $U_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.

a. Calculer $T_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $U_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $U_n(\pi)$ et, pour $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $T_n(\pi)$.

$$\begin{aligned} T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \binom{2}{0} \cos(0) + \binom{2}{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \binom{2}{2} \cos(\pi) \\ &= 1 + 2 \times 0 - 1 \end{aligned}$$

D'où : $T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} U_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \binom{2}{0} \sin(0) + \binom{2}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \binom{2}{2} \sin(\pi) \\ &= 0 + 2 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

D'où : $U_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

$U_n(\pi) = 0$ car $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(k\pi)$.

Enfin : $T_0(\pi) = \binom{0}{0} \cos(0)$ donc $T_0(\pi) = 1$.

$$T_1(\pi) = \binom{1}{0} \cos(0) + \binom{1}{1} \cos(\pi) = 1 - 1 \quad \text{donc } \boxed{T_1(\pi) = 0}.$$

$$T_2(\pi) = \binom{2}{0} \cos(0) + \binom{2}{1} \cos(\pi) + \binom{2}{2} \cos(2\pi) = 1 - 2 \times 1 + 1 \quad \text{donc } \boxed{T_2(\pi) = 0}.$$

b. Calculer $T_n(x)$ et $U_n(x)$.

Remarque : On voudrait utiliser les résultats de la question 1., mais les coefficients binomiaux nous empêchent de le faire directement. Cependant on se souvient avoir observé que les termes successifs d'une suite géométrique affectés des coefficients binomiaux était le développement de la formule du binôme de Newton avec une somme de la forme $1 + q$. Après l'expérience de la première question, nous avons des raisons de penser que ça pourrait fonctionner ici.

Nous avons, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (1 + e^{ix})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \\ &= T_n(x) + i U_n(x) \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer des expressions simples de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'expression de départ. Le recours à la factorisation par l'exponentiel imaginaire de l'angle moitié semble ici encore adapté étant donné que nous avons affaire à une puissance.

De plus :

$$(1 + e^{ix})^n = \left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} \right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right)$$

D'où, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\boxed{T_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{U_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}.$$

Remarque : On peut vérifier qu'à part le cas $T_0(\pi) = 1$ ces nombres sont nuls dès que $x = \pi$, et que $T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $U_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

■ Exercice 6 * – Recherche de fonction réciproque ■

On cherche à établir que la fonction f définie par :
$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}}$$

réalise une bijection vers $\mathbb{R}$, et à déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Le numérateur de la fraction est positif pour tout réel x .

Le dénominateur est strictement positif sur $] - 3; 3[$, d'après la règle du signe du trinôme.

On en déduit : $\mathcal{D}_f =] - 3; 3[$.

2. Sens de variation sans détermination de la fonction dérivée de f .

- a. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathcal{D}_f$ par

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{9 - x^2}.$$

La fonction g est somme et quotient de fonctions de référence dérivables sur $\mathcal{D}_f$, elle est donc dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et :

$$g'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - (x^2 + 1) \times (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{20x}{(9 - x^2)^2}.$$

La règle du signe d'un produit et d'un quotient nous permet d'affirmer que $g'(x)$ est du signe de x sur $\mathcal{D}_f$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $] - 3; 0]$ et strictement croissante sur $[0; 3[$.

Elle admet par conséquent un minimum en 0 qui vaut $g(0) = \frac{1}{9}$.

Autre méthode : On peut écrire : $g(x) = (x^2 + 1) \times \frac{1}{9 - x^2}$.

Sur $[0; 3[$:

- la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est composée de la fonction carré et d'une fonction affine croissante, elle est donc croissante ;

- la fonction $x \mapsto \frac{1}{9 - x^2}$ est composée de la fonction carré, d'une fonction affine décroissante et de la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc croissante. La fonction g s'écrit donc sur $[0; 3[$ comme le produit de deux fonctions positives croissantes, elle est donc croissante.

Comme en outre c'est une fonction paire, on peut en déduire qu'elle est décroissante sur $] - 3; 0]$.

- b. En déduire les variations de la fonction $\sqrt{g}$ sur $\mathcal{D}_f$.

On sait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc, d'après le théorème sur le sens de variation des fonctions composées, la fonction $\sqrt{g}$ aura les mêmes variations que la fonction g .

La fonction $\sqrt{g}$ est donc strictement décroissante sur $] - 3; 0]$ et strictement croissante sur $[0; 3[$.

Elle admet par conséquent un minimum en 0 qui vaut $\sqrt{g(0)} = \frac{1}{3}$.

- c. Ces résultats permettent-ils de déterminer les variations de la fonction f sur son domaine de définition ?

La fonction f est le produit entre la fonction g et la fonction identité. Le cours

(Proposition 2 page 5) ne donne de résultat sur le sens de variation d'un produit de deux fonctions que dans le cas où ces fonctions sont positives. Or la fonction identité est négative sur $] -3; 0]$. Ces résultats ne permettent donc pas de déterminer les variations de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.

Remarque : Si on a compris le principe de la preuve de la proposition 2 du cours, on sait que l'on peut déterminer le sens de variation de la fonction f sur $] -3; 0]$:

La fonction g est strictement décroissante sur $] -3; 0]$ donc, par définition de la stricte décroissance, pour tout couple $(a, b) \in] -3; 0]^2 : a < b \implies g(a) > g(b)$.

En multipliant chaque membre de cette inégalité par le nombre x strictement négatif sur $] -3; 0[: x \times g(a) < x \times g(b) \iff f(a) < f(b)$.

On en conclue d'après la définition de la stricte croissance, que la fonction f est strictement croissante sur $] -3; 0[$, et par extension sur $] -3; 0]$.

- d. Étudier la parité de la fonction f .

L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = (-x) \sqrt{\frac{(-x)^2 + 1}{9 - (-x)^2}} = -x \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

- e. Déterminer les variations de la fonction f sur son domaine de définition.

Sur l'intervalle $[0; 3]$, la fonction f est le produit de la fonction g et de la fonction identité, qui sont croissantes et positives sur $[0; 3]$. On en déduit, que la fonction f est croissante sur $[0; 3]$.

La fonction f est en outre impaire, donc par propriété des fonctions impaires (*par symétrie*), on conclue que la fonction f est aussi croissante sur $] -3; 0]$.

La fonction f est donc croissante sur $\mathcal{D}_f$.

3. Sens de variation par la détermination de la fonction dérivée de f .

- a. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer sa fonction dérivée f' .

On sait que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, mais l'argument de la racine carrée dans l'expression de $f(x)$ ne s'annule pas. On peut donc conclure que la fonction f étant somme, quotient et composée de fonctions dérivables, est dérivable sur D_f .

Profitons du travail réalisé à la question 2. pour alléger les calculs et les écritures du début. On a : $f(x) = x\sqrt{g(x)}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \sqrt{g(x)} + x \times \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}} + \frac{x \times \frac{20x}{(9 - x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}}} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2} + \frac{10x^2}{(9 - x^2)^2}}{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}}} \\ &= \frac{(9 - x^2)(x^2 + 1) + 10x^2}{(9 - x^2)^2 \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}}} \\ &= \frac{-x^4 + 18x^2 + 9}{(9 - x^2)^2 \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}}} \end{aligned}$$

- b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.

Le numérateur de l'expression obtenue de $f'(x)$ est un trinôme bicarré, sa mise sous forme canonique devrait nous permettre de prouver qu'il est strictement positif sur $\mathcal{D}_f$.

On a, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$-x^4 + 18x^2 + 9 = -(x^2 - 9)^2 + 81 + 9 = 90 - (x^2 - 9)^2.$$

Or

$$\begin{aligned} & -3 \leq x \leq 3 \\ \iff & 0 \leq |x| \leq 3 \\ \iff & 0 \leq x^2 \leq 9 \\ \iff & -9 \leq x^2 - 9 \leq 0 \\ \iff & 81 \geq (x^2 - 9)^2 \geq 0 \\ \iff & 9 \leq 90 - (x^2 - 9)^2 \leq 90 \\ \implies & 90 - (x^2 - 9)^2 > 0 \end{aligned}$$

Le nombre $f'(x)$ s'écrit donc comme le quotient de quantités strictement positives, il est donc strictement positif pour tout x de $\mathcal{D}_f$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

4. Justifier que la fonction f réalise une bijection de l'ensemble $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 3} 9 - x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1 = 10 > 0.$$

Or on sait que sur $[0; 3[$ on a : $9 - x^2 > 0$, donc d'après le théorème sur la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{9 - x^2} = +\infty.$$

Or la fonction racine carrée a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, donc d'après le théorème sur la limite des fonctions composées :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}} = +\infty.$$

Donc enfin, d'après le théorème la limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty.$$

La fonction f étant impaire, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$.

La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $\mathcal{D}_f$, donc son ensemble image est $\mathbb{R}$. Comme en outre elle est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$, on en conclue qu'elle réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f .

Soit y l'unique réel tel que $y = f(x)$.

On sait que si l'on parvient à écrire $f(x)$ de sorte à ne faire apparaître le nombre x une seule fois, alors il sera possible de considérer la fonction f comme uniquement composée de fonctions. Il suffira de composer dans l'ordre inverse les réciproques de ces fonctions

pour obtenir la fonction réciproque de f . Mais cette tâche semble impossible.
Par contre, on observe que si l'on considère le carré de chaque membre de l'égalité, il sera peut-être possible d'exprimer x^2 en fonction de y^2 .

Pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned}
 & y = x \sqrt{\frac{x^2 + 1}{9 - x^2}} \\
 \Leftrightarrow & y^2 = x^2 \frac{x^2 + 1}{9 - x^2} \quad \text{car } x \text{ et } y \text{ sont de même signe.} \\
 \Leftrightarrow & y^2(9 - x^2) = x^4 + x^2 \\
 \Leftrightarrow & x^4 + (1 + y^2)x^2 - 9y^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(x^2 + \frac{y^2 + 1}{2}\right)^2 - \frac{(y^2 + 1)^2}{4} - 9y^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + \frac{y^2 + 1}{2} = \sqrt{\frac{(y^2 + 1)^2}{4} + 9y^2} \\
 \Leftrightarrow & |x| = \sqrt{\sqrt{\frac{(y^2 + 1)^2}{4} + 9y^2} - \frac{y^2 + 1}{2}} \\
 \Leftrightarrow & |x| = \sqrt{\frac{\sqrt{y^4 + 38y^2 + 1} - y^2 - 1}{2}}
 \end{aligned}$$

La fonction réciproque de la fonction f est donc la fonction impaire définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^4 + 38x^2 + 1} - x^2 - 1}{2}}.$$

~