DS 3 de mathématique

Proposition de corrigé *(avec commentaires)*

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, après avoir précisé le domaine de définition, déterminer une primitive F de la fonction f donnée *(le niveau de rédaction est libre, tous les points sont donnés si le résultat est bon et que la démarche apparaît clairement)*.

Remarque : On observe que les fonctions de cet exercice, comme produit, quotient et/ou composées de fonctions continues, sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition. Dès lors elles sont primitivables sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto 4x\mathrm{e}^{(x^2)}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
On reconnaît, à une constante multiplicative près, la forme primitivable $u'\mathrm{e}^u$:

$$f(x) = 2 \times 2x\mathrm{e}^{(x^2)}.$$

Une fonction primitive F est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad F(x) = 2\mathrm{e}^{(x^2)}$.

2. $f : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
On reconnaît, à une constante multiplicative près, la forme primitivable $u'u^n$:

$$f(x) = -(-\sin(x))\cos^2(x).$$

Une fonction primitive F est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad F(x) = -\dfrac{\cos^3(x)}{3} = -\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
On reconnaît la forme primitivable $u^n u'$: $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$.

Une fonction primitive F est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad F(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

4. $f : x \mapsto x^3\sqrt{x^4 - 1}$
L'argument de la fonction racine carrée doit être positif ou nul donc :

$$x^4 - 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2-1)(x^2+1) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2+1) \geqslant 0$$

La règle du signe d'un produit nous permet de conclure :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[= \mathbb{R} \backslash]-1; 1[.$$

On reconnaît la forme primitivable $u^n u'$: $f(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 \left(x^4 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$.
Une fonction primitive F est donc définie sur tout intervalle de $\mathscr{D}_f$ par :

$$F(x) = \frac{1}{4} \frac{(x^4-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}(x^4-1)\sqrt{x^4-1}.$$

5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$
Le dénominateur de la fraction est un trinôme dont la forme canonique est : $(x+2)^2+1$.
Il est donc strictement positif pour tout réel x. On a dès lors : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \frac{1}{1+(x+2)^2}.$$

On reconnaît la forme primitivable $\dfrac{u'}{1+u^2}$, donc une primitive de f sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ est définie par :

$$F(x) = \operatorname{Arctan}(x+2).$$

Exercice 2

Calculer les intégrales ci-dessous.
On précisera en préalable au calcul le signe de chaque intégrale (*en justifiant*).

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{1-2x}\,\mathrm{d}x$

Il s'agit d'intégrer une fonction qui prend des valeurs négatives sur l'intervalle $[1,2]$. La borne inférieure étant plus petite que la borne supérieure, l'intégrale sera négative.

Méthode 1 : Cherchons deux constantes réelles a et b telles que pour tout x de l'intervalle $[1,2]$ on ait :

$$\frac{4x-1}{1-2x} = a + \frac{b}{1-2x} = \frac{a(1-2x)+b}{1-2x} = \frac{-2ax+a+b}{1-2x}$$

Par identification des coefficients du numérateur : $\begin{cases} -2a \quad = 4 \\ a+b = -1 \end{cases} \iff (a,b) = (-2,1)$.

D'où : $\dfrac{4x-1}{1-2x} = \dfrac{1}{1-2x} - 2$.

Méthode 2 : On a, pour tout x de $[1,2]$:

$$\frac{4x-1}{1-2x} = \frac{-2(1-2x)+1}{1-2x} = \frac{1}{1-2x} - 2.$$

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{1-2x} - 2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{-2}{1-2x} - 2\int_1^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\ln|1-2x|\right]_1^2 - 2$$

Sur l'intervalle $[1,2]$ on a : $1-2x<0$, dès lors : $|1-2x| = 2x-1$.
D'où :

$$I = -\frac{1}{2}\left[\ln(2x-1)\right]_1^2 - 2 = -\frac{1}{2}\ln(3) - 2$$

2. $J = \displaystyle\int_2^1 4x(\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$

Il s'agit d'intégrer une fonction qui prend des valeurs positives sur l'intervalle $[1,2]$. La borne inférieure étant plus grande que la borne supérieure, l'intégrale sera négative.

On a :

$$J = \int_2^1 4x(\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_2^1 x \times 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

D'où, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} J &= 2\left[x \times \mathrm{e}^{2x}\right]_2^1 - 2\int_2^1 1 \times \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}^4 - 2\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_2^1 \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}^4 - (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^4) \\ &= \mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e}^4 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Antécédent de 1 par la fonction sinus hyperbolique

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - 2X - 1 = 0 \quad (E)$.

On a :

$$(E) \iff (X-1)^2 - 2 = 0 \iff \left(X - 1 - \sqrt{2}\right)\left(X - 1 + \sqrt{2}\right) = 0$$

L'ensemble solution de cette équation produit nul est : $S = \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2 \quad (E')$.

On a :

$$(E') \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 1 = 2\mathrm{e}^x \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x - 1 = 0$$

On observe que le nombre x est solution de l'équation (E') si et seulement si e^x est solution de l'équation (E).

Seule la solution positive de l'équation (E) convient car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.

Ainsi $\mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2}$, donc $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

L'ensemble solution de cette équation est donc : $S = \left\{\ln(1+\sqrt{2})\right\}$

c. En déduire que $\mathrm{Argsh}(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

On a :

$$(E') \iff \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 \iff \mathrm{sh}(x) = 1$$

L'unique solution de l'équation (E') est donc $\mathrm{Argsh}(1)$.

On a bien :

$$\mathrm{Argsh}(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2. Montrer que pour tout réel x on a : $\mathrm{ch}^2(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(2x) + 1\right)$

$$\mathrm{ch}^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{2\,\mathrm{ch}(2x) + 2}{4} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(2x) + 1\right)$$

3. Établir le résultat : $\mathrm{sh}\left(2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}$.

On a :

$$2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \ln\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right) = \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

Par définition de la fonction sinus hyperbolique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right) &= \frac{\mathrm{e}^{\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)} - \mathrm{e}^{-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2 - 1}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{9+8+12\sqrt{2}-1}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{8+6\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(8+6\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{24-24+18\sqrt{2}-16\sqrt{2}}{9-8} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(*on pourra recourir à un changement de variable utilisant les fonctions hyperboliques*)

Réalisons le changement de variable : $t = \mathrm{sh}(x)$.

Remarque : $t = \mathrm{ch}(x)$ ne fonctionne pas car l'intervalle d'intégration $[0,1]$ n'est pas inclus dans l'image de la fonction ch.
En outre l'expression à intégrer ne s'y prête pas.

On a : $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$.
Bornes d'intégration :
Si $t = 0$ alors $x = \mathrm{Argsh}(0) = 0$, et si $t = 1$ alors $x = \mathrm{Argsh}(1)$.
Or $\mathrm{Argsh}(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ d'après la question **1.c.**.
D'où :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \left(\mathrm{ch}(2x)+1\right)\,\mathrm{d}x \qquad \text{d'après la question } \mathbf{2.} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2x) + x\right]_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\left(2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question **3.** on obtient finalement :

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

On sera attentif à avoir une rédaction suffisante et compacte.

1. Sur $\mathbb{C}$:

a. $z'' + 3z' + 5z = 0$

Remarque : Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire homogène (i.e. sans second membre) d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3r + 5 = 0$$

On calcule :

$$\Delta = 9 - 20 = -11 \qquad ; \qquad r_1 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} \qquad ; \qquad r_2 = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions z définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$z(t) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes complexes.}$$

b. $z'' - 3z' = e^{it}$

Remarque : Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec un second membre sous la forme $Ae^{\alpha t}$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r = 0$$

Ses solutions sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 3$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$h(t) = C_1 + C_2 e^{3t}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes complexes.}$$

L'équation caractéristique n'admet pas i comme racine. Cherchons alors une solution particulière sous la forme $t \mapsto Be^{it}$.
La constante complexe B doit vérifier, pour tout réel t :

$$-Be^{it} - 3iBe^{it} = e^{it}$$

D'où :

$$-B - 3iB = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = \frac{1}{-1-3i} = \frac{-1+3i}{1+9} = -0,1 + 0,3i$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions z définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$z(t) = C_1 + C_2 e^{3t} + \frac{3i-1}{10} e^{it}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes complexes.}$$

c. $z'' - 4z' + 5z = e^{2t}e^{it}$

Remarque : Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec un second membre que nous allons mettre sous la forme $Ae^{\alpha t}$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \quad \iff \quad (r-2)^2 + 1 = 0 \quad \iff \quad (r - 2 + i)(r - 2 - i) = 0$$

Ses solutions sont $r_1 = 2 - i$ et $r_2 = 2 + i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$h(t) = C_1 e^{(2-i)t} + C_2 e^{(2+i)t}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes complexe.}$$

L'équation initiale peut s'écrire :

$$z'' - 4z' + 5z = e^{(2+i)t} = e^{r_2 t}$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $z_0 : t \mapsto Bte^{(2+i)t}$.
On détermine, pour tout réel t :

$$z_0'(t) = Be^{(2+i)t}(1 + (2+i)t)$$

et

$$z_0''(t) = Be^{(2+i)t}(2 + i + (2+i)(1 + (2+i)t)) = Be^{(2+i)t}((3+4i)t + 4 + 2i)$$

La constante complexe B doit vérifier, pour tout réel t :

$$B((3+4i)t + 4 + 2i - 4(1 + (2+i)t - 5t) = 1$$

soit $\quad 2iB = 1 \quad$ ou encore : $\quad B = -\dfrac{1}{2}i.$
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions z définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$z(t) = C_1 e^{(2-i)t} + C_2 e^{(2+i)t} - \frac{1}{2} i t e^{(2+i)t}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles.}$$

2. Sur $\mathbb{R}$: (*on pourra récupérer des résultats de la question **1.***)

a. $y' + 3y = e^t$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = Ce^{-3t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

Nous savons qu'il existe une solution particulière y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(t) = Be^t$.
La constante B vérifie :

$$B + 3B = 1 \qquad B = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t + Ce^{-3t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

b. $y' + y = \text{ch}(t)$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = C\text{e}^{-t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

On a : $\quad \text{ch}(t) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-t}$.

Cherchons des solutions particulières pour un second membre e^{t} et e^{-t}, puis appliquons le principe de superposition. *(chapitre 6 théorème 5)*

On obtient pour le premier $y_1(t) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{t}$ et pour le second $y_2(t) = t\text{e}^{-t}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \frac{1}{4}\text{e}^{t} + \frac{1}{2}t\text{e}^{-t} + C\text{e}^{-t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

c. $y' + y = \dfrac{1}{1+\text{e}^{t}}$

Comme ci-dessus, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = C\text{e}^{-t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

Cherchons une solution particulière y_0 à l'aide de la méthode de variation de la constante. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_0(t) = C(t)\text{e}^{-t}$$

On obtient : $\quad C'(t) = \dfrac{\text{e}^{t}}{1+\text{e}^{t}}$. $\quad$ On en déduit : $\quad C(t) = \ln(1+\text{e}^{t})\text{e}^{-t}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \Big(\ln(1+\text{e}^{t}) + C\Big)\,\text{e}^{-t}, \qquad C \text{ étant une constante réelle.}$$

d. $t(1+\ln^2(t))y' + y = 0$

Le coefficient de y' n'est défini que sur $I = \mathbb{R}_+^*$, mais ne s'y annule pas. Dès lors, sur I l'équation est équivalente à l'équation normalisée :

$$y' + \frac{\frac{1}{t}}{1+\ln^2(t)}y = 0.$$

On reconnaît pour le coefficient de y la forme primitivable $\dfrac{u'}{1+u^2}$. Les solutions de cette équation homogène sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(t) = C\text{e}^{-\operatorname{Arctan}(\ln(t))}.$$

e. $y'' - 3y' = 2\cos(t) - \sin(t) + t$

On reconnaît un premier membre analogue à celui de la question **1.b.**.

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = C_1 + C_2\text{e}^{3t}, \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelle.}$$

On observe que $\cos(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.
Donc la fonction ...
Cherchons un polynôme y_3 défini par $y_3(t) = t(at+b), (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$y_3''(t) - 3y_3'(t) = t \iff 2a - 3(2at+b) = t \implies \begin{cases} -6a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

On obtient : $y_3(t) = t\left(-\frac{1}{6}t - \frac{1}{9}\right)$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions y définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$z(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3t} + ... + t\left(-\frac{1}{6}t - \frac{1}{9}\right), \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles.}$$

f. $y'' + 3y' + 5y = t^2$, avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.
On reconnaît un premier membre analogue à celui de la question **1.a.**.
Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions h définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right), \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes réelles.}$$

Cherchons un polynôme y_0 défini par $y_0(t) = at^2 + bt + c, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel t :

$$y_0''(t) + 3y_0'(t) + 5y_0(t) = t^2 \iff 2a + 3(2at+b) + 5(at^2+bt+c) = t^2$$

$$\implies \begin{cases} 5a = 1 \\ 6a + 5b = 0 \\ 2a + 3b + 5c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{6}{25} \\ c = \frac{8}{125} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions y définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{125}\left(25t^2 - 30t + 8\right),$$

C_1 et C_2 étant des constantes réelles.

∼