DS 3 de mathématique

Le sujet propose quatre exercices dont la durée totale devrait excéder la durée dévolue à l'épreuve.
Chacun choisira de traiter les exercices les plus à même de valoriser ses compétences.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre différent.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, après avoir précisé le domaine de définition, déterminer une primitive F de la fonction f donnée *(le niveau de rédaction est libre, tous les points sont donnés si le résultat est bon et que la démarche apparaît clairement)*.

1. $f : x \mapsto 4x\mathrm{e}^{(x^2)}$

2. $f : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$

3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

4. $f : x \mapsto x^3\sqrt{x^4-1}$

5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

Exercice 2

Calcuer les intégrales ci-dessous.
On précisera en préalable au calcul le signe de chaque intégrale (*en justifiant*).

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{1-2x}$

2. $J = \displaystyle\int_1^2 4x(\mathrm{e}^x)^2$

Exercice 3

1. Antécédent de 1 par la fonction sinus hyperbolique

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\quad X^2 - 2X - 1 = 0 \quad (E)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2 \quad (E')$.

c. En déduire que $\mathrm{Argsh}(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2. Montrer que pour tout réel x on a : $\quad \mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x)+1)$

3. Établir le résultat : $\quad \mathrm{sh}\left(2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}$.

4. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(*on pourra recourir à un changement de variable utilisant les fonctions hyperboliques*)

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles ci-dessous.

On sera attentif à avoir une rédaction suffisante et compacte.
On pourra récupérer des résultats d'un cas précédent pour résoudre un cas.

1. Sur $\mathbb{C}$:

a. $z'' + 3z' + 5 = 0$ **b.** $z'' - 3z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ **c.** $z'' - 4z' + 5 = \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

2. Sur $\mathbb{R}$: (*on pourra récupérer des résultats de la question **1.***)

a. $y' + 3y = \mathrm{e}^t$

b. $y' + y = \mathrm{ch}(t)$

c. $y' + y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^t}$

d. $x(1 + \ln^2(t))y' + y = 0$

e. $y'' - 3y' = 2\cos(t) - \sin(t) + t$

f. $y'' + 3y' + 5 = t^2$, avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

$\sim$