TEST DE CALCUL

Ce test est destiné à évaluer votre aisance en calcul, composante essentielle en classe préparatoire, que ce soit en mathématiques, en physique, en chimie ou en sciences industrielles.
Faites ce test en deux heures, sans vous aider d'une calculatrice ou de rappels de cours.
Si vous détectez des difficultés dans certains domaines, il est essentiel que vous vous entraîniez au cours de l'été.
Voici quelques sites dont les ressources sont gratuites et qui pourront vous être utiles dans ce travail de consolidation :

KHAN ACADEMY :
https://fr.khanacademy.org/math?gclid=CjwKCAjw5NqVBhAjEiwAeCa97QOmp36AMqP_G3hfVkfVKtrGdcSOs1bw_pB_uYASsYJ2voTnk--95xoCGVoQAvD_BwE

KWYK : https://www.kwyk.fr/exercices/libres/mathematiques/

CMATH : https://www.cmath.fr/1ere/suites/exercice3.php

JEUXMATHS : https://www.jeuxmaths.fr/exercice-de-math-equationtangente.html

TOUPTY : https://www.toupty.com/exercice-math-lycee.html

MATHS ET TIQUES (site d'Yvan Monka) : https://www.maths-et-tiques.fr/

L'équipe enseignante des classes de PCSI et MPSI

MANIPULATION D'EXPRESSIONS LITTERALES

Exercice 1

On donne :

$$A = \frac{\dfrac{6(p+1)}{p(p-1)(2p-2)}}{\dfrac{2p+2}{p^2(p-1)^2}} \text{ où } p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$$

Mettre A sous la forme d'une seule fraction écrite le plus simplement possible.

Exercice 2

On donne la relation suivante où v est un réel positif :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

Déterminer l'expression de v en fonction de m, g, z et E.

Exercice 3

On donne la relation suivante où p, q et f sont des réels non nuls :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Donner l'expression de q en fonction de p et de f.

Exercice 4

On donne la relation entre x réel, n réel inférieur à 2 et p entier supérieur ou égal à 1 :

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{n}{p+1}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$

Déterminer l'expression de x en fonction de n et p.

DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Exercice 5

Soit la fonction $f: x \longmapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ définie sur $[0; +\infty[$.

Détermine l'expression de la dérivée f'de cette fonction par rapport à la variable x.

Exercice 6

Soit la fonction $g: x \longmapsto g(x) = n\sqrt{x^2 + D^2} + p\sqrt{(L-x)^2 + d^2}$ pour $x \in [0; L]$ où n, p, L, d et D sont des constantes positives.

Déterminer l'expression de la dérivée g' de cette fonction par rapport à la variable x.

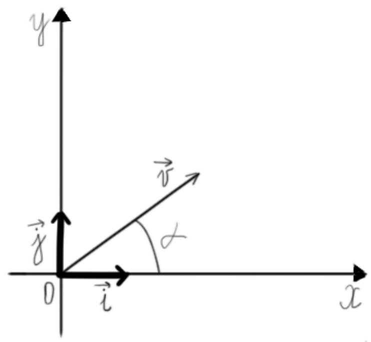
VECTEURS

Exercice 7

Dans un plan muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le vecteur $\vec{v}$ dont la nome est notée $\|\vec{v}\|$ et faisant un angle α avec l'axe (Ox) orienté par le vecteur de base $\vec{\imath}$ comme représenté ci-contre.

On note v_x et v_y les composantes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\vec{v} = v_x\,\vec{\imath} + v_y\,\vec{\jmath}$

Déterminer l'expression de v_x et celle de v_y en fonction de $\|\vec{v}\|$ et de α.



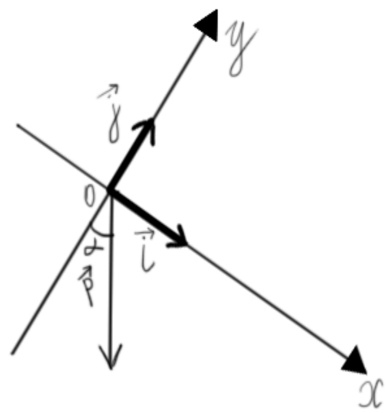
Exercice 8

Dans un plan muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le vecteur $\vec{P}$ dont la norme est notée $\|\vec{P}\|$ et orienté comme représenté ci-contre.

On note P_x et P_y les composantes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$\vec{P} = P_x\,\vec{\imath} + P_y\,\vec{\jmath}$

Déterminer l'expression de P_x et celle de P_y en fonction de $\|\vec{P}\|$ et de α.



FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ exprimé en radians :

a. $sin\,(x) = 1$

b. $sin\,\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c. $sin\,(2x) = cos\,(3x)$

On rappelle :

angle θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\,\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

NOMBRES COMPLEXES

LES NOMBRES COMPLEXES SONT AU PROGRAMME DE « MATHS EXPERTES »

Exercice 10

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle avec un argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

$$z_1 = 2 + 2\,i$$

$$z_2 = 3 - \sqrt{3}\,i$$

On donne :

angle θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\,\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\,\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Exercice 11

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants.

$$z_3 = \frac{3-4i}{2+2i}$$

$$z_4 = 1 + \frac{5}{6+8i}$$

DETERMINATION D'ANGLES ET DE LONGUEURS

Exercice 12

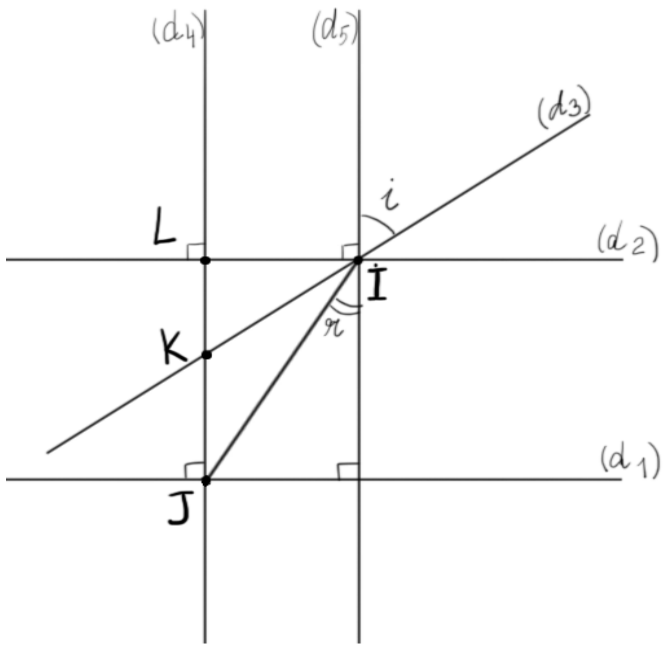
Sachant que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, que les droites (d_4) et (d_5) sont perpendiculaires à (d_1) et (d_2), et que les angles i et r sont donnés :

a. Déterminer l'expression des angles $\widehat{LIJ}$, $\widehat{LKI}, \widehat{LJI}$ *et* $\widehat{JKI}$

b. Exprimer la longueur LI en fonction de la longueur LK et de l'angle i

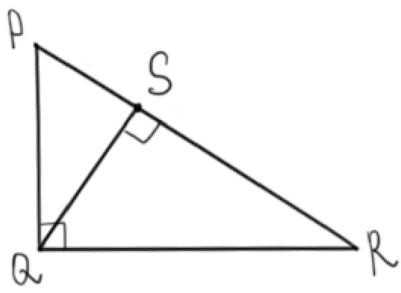
c. Exprimer la longueur LI en fonction de la longueur LJ et de l'angle r

d. En déduire une relation entre la longueur LK, l'angle i, la longueur LJ et l'angle r



Exercice 13

Le triangle PQR est rectangle en Q. Le segment $[QS]$ est perpendiculaire au segment $[PR]$.
Exprimer la longueur QS en fonction des longueurs QP, QR et PR.



Exercice 14

On considère le triangle ABC dont les côtés AC et AB mesurent respectivement 10 cm et 8 cm.
Sachant que l'angle $\hat{A}$ est égale à $\frac{\pi}{3}$, déterminer, au dixième près, la longueur du côté BC en cm.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 15

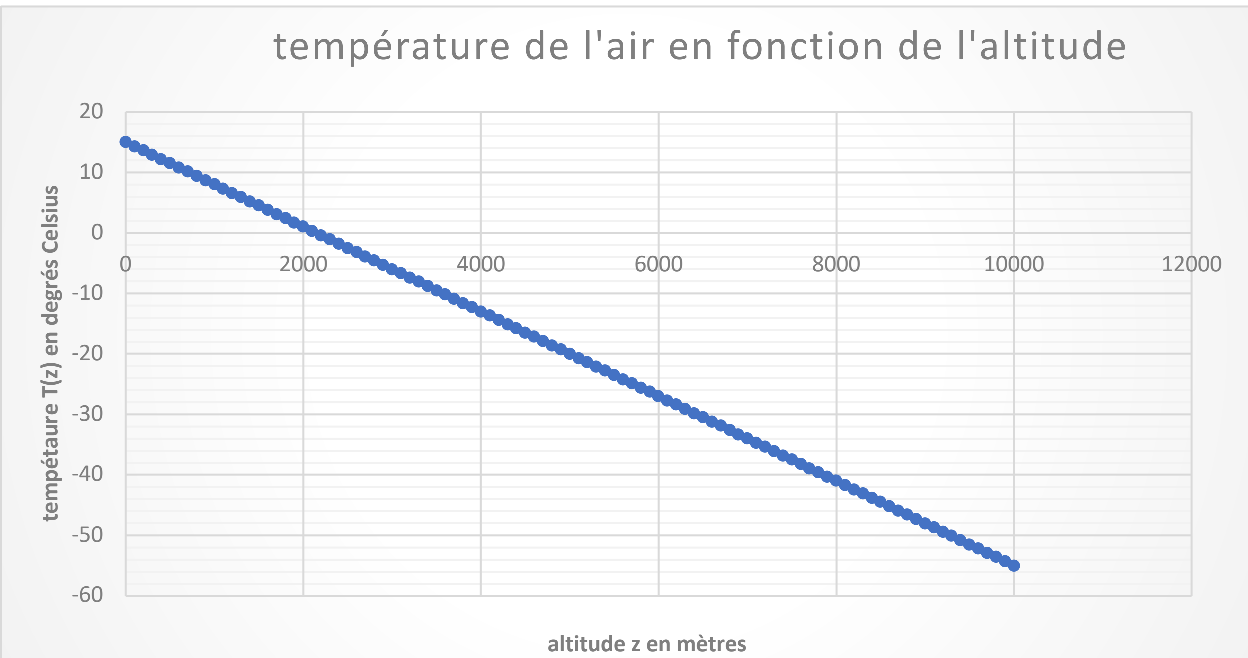
Déterminer la fonction $f : x \mapsto f(x)$ qui vérifie $f(0) = 2$ qui est solution de l'équation différentielle :

$$f' + 2f = 3$$

EQUATIONS DE DROITES

Exercice 16

La droite ci-dessous représente la variation de la température $T(z)$ de l'air pour une altitude z comprise entre 0 et 10000 mètres.
Déterminer l'équation de cette droite.



Exercice 17

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère le point A de coordonnées $(2; 3)$ et le vecteur $\vec{u} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point A et orthogonale au vecteur $\vec{u}$.

CALCUL D'INTEGRALES

Exercice 18

Calculez les intégrales suivantes :

a. $I_1 = \int_0^{2\pi} cos\ x\ dx$

b. $I_2 = \int_3^5 \frac{2}{x} dx$

c. $I_3 = \int_1^3 (2 + 3x)\ dx$

d. $I_4 = \int_0^1 xe^x dx$ *Indice : pour calculer I_4 on effectuera une intégration par parties.*

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Exercice 19

En utilisant une propriété du logarithme népérien mettre les expressions ci-dessous sous la forme la plus simple possible d'un seul logarithme népérien ou d'un nombre, selon les cas :

a. $A = 3\ ln\ (a) + 4\ ln\ (b)$

b. $B = ln\ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + ln\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

c. $C = -e^{-ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

d. $D = ln\left(\sqrt{e^4}\right) - ln\left(\sqrt{e^2}\right)$

CONVERSIONS

Exercice 20

Effectuer les conversions ci-dessous. Vous exprimerez le résultat en écriture scientifique.

a. $23\ mL = \quad m^3$

b. $0{,}45\ kg = \quad mg$

c. $2{,}1\ g.cm^{-3} = \quad kg.m^{-3}$

d. $0{,}80\ kg.L^{-1} = \quad g.cm^{-3}$