MANIPULATION D'EXPRESSIONS LITTERALES

Exercice 1

$$A = \frac{\frac{6(p+1)}{p(p-1)(2p-2)}}{\frac{2p+2}{p^2(p-1)^2}}$$

$$A = \frac{6(p+1)}{p(p-1)(2p-2)} \times \frac{p^2(p-1)^2}{2p+2}$$

$$A = \frac{6(p+1)}{2p(p-1)(p-1)} \times \frac{p^2(p-1)^2}{2(p+1)}$$

$$A = \frac{6(p+1)}{2p(p-1)(p-1)} \times \frac{p^2(p-1)^2}{2(p+1)}$$

$$A = \frac{6p}{4}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{2}p}$$

Exercice 2

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - mgz$$

$$v^2 = 2 \times \frac{E - mgz}{m}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2 \times \left(\frac{E}{m} - gz\right)}}$$

Exercice 3

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p}{pf} - \frac{f}{pf}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{pf}$$

$$\boldsymbol{q = \frac{pf}{p-f}}$$

Exercice 4

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{n}{p+1}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$
$$1-x^2 = \left(\frac{n}{p+1}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$
$$1-x^2 = \left(\frac{n}{p+1}\right)^2 - \left(\frac{n}{p+1}\right)^2\frac{x^2}{n^2}$$
$$x^2 - \left(\frac{n}{p+1}\right)^2\frac{x^2}{n^2} = 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2$$
$$x^2 - \left(\frac{n}{p+1}\right)^2\frac{x^2}{n^2} = 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{1}{(p+1)^2}x^2 = 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2$$
$$\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)x^2 = 1-\left(\frac{n}{p+1}\right)^2$$
$$\left(\frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2}\right)x^2 = \frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2}$$
$$\frac{(p+1)^2-1}{(p+1)^2}x^2 = \frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2}$$
$$x^2 = \frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2-1}$$
$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2-1}}}$$

DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Exercice 5

La fonction $f: x \longmapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ est du type $\frac{u}{v}$ donc sa dérivée est de la forme $\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Avec : $u(x) = \sqrt{x}-1$ $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $v(x) = \sqrt{x}+1$ $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(\sqrt{x}+1\right) - \left(\sqrt{x}-1\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}}$$

Exercice 6 Soit la fonction $g: x \longmapsto g(x) = n\sqrt{x^2 + D^2} + p\sqrt{(L-x)^2 + d^2}$ pour $x \in [0; L]$

On utilise ici : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour les deux termes de la somme, avec successivement $x^2 + D^2$ et $(L-x)^2 + d^2$ qui jouent le rôle de $u(x)$

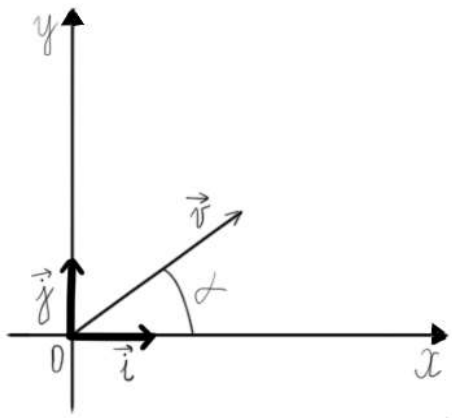
Ainsi, la dérivée de $\sqrt{x^2 + D^2}$ s'écrit $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+D^2}}$ et la dérivée de $\sqrt{(L-x)^2 + d^2}$ a pour expression $\frac{-2(L-x)}{2\sqrt{(L-x)^2+d^2}}$

Attention, dans ce deuxième cas il y a un signe moins car lorsqu'on dérive $u(x) = (L-x)^2 + d^2$, la dérivée de $(L-x)^2$ a pour expression $-2(L-x)$

$$g'(x) = n\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + D^2}} + p\frac{-2(L-x)}{2\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}$$
$$\boldsymbol{g'(x) = n\frac{x}{\sqrt{x^2 + D^2}} - p\frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}}$$

VECTEURS

Exercice 7

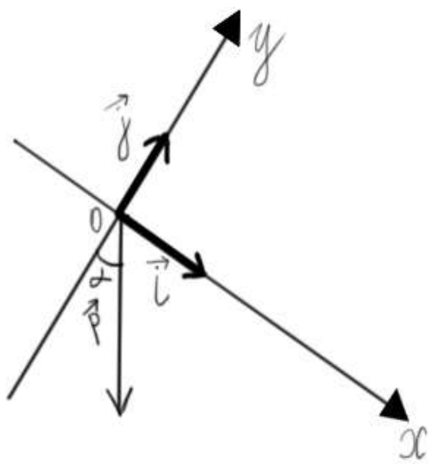


$$\frac{v_x}{\|\vec{v}\|} = cos\ \alpha$$
$$\frac{v_y}{\|\vec{v}\|} = sin\ \alpha$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \|\vec{v}\|\ cos\ \alpha\ \vec{\imath} + \|\vec{v}\|\ sin\ \alpha\ \vec{\jmath}}$$

Exercice 8



$$\frac{P_x}{\|\vec{P}\|} = sin\ \alpha$$
$$\frac{P_y}{\|\vec{P}\|} = -cos\ \alpha$$

Attention, on voit que la composante P_y est négative sur le schéma. Il faut donc mettre un signe moins dans la deuxième relation.

On en déduit : $\boldsymbol{\vec{P} = \|\vec{P}\|\ sin\ \alpha\ \vec{\imath} - \|\vec{P}\|\ cos\ \alpha\ \vec{\jmath}}$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice 9

a. $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2\ k\ \pi}$ **où** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

b. $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\ k\ \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\ k\ \pi$

$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 6k\pi}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{2} + 6k\pi}$ **où** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

c. $sin\ (2x) = cos\ (3x)$ peut se réécrire : $sin\ (2x) = sin\ (\frac{\pi}{2} - 3x)$ car $cos(u) = sin\ (\frac{\pi}{2} - u)$

$$2x = \frac{\pi}{2} - 3x + \ 2\ k\ \pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \ 2\ k\ \pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\ \ k\ \pi} \textbf{ où } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 10

$z_1 = 2 + 2\ i$

On calcule d'abord le module : $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

On peut ainsi écrire : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(cos\ \left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\ \left(\frac{\pi}{4}\right)i\right)$$

$$\boldsymbol{z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$z_2 = 3 - \sqrt{3}\ i$

On calcule d'abord le module : $|z_2| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On peut ainsi écrire : $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right)$

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(cos\ \left(-\frac{\pi}{6}\right) + sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)i\right)$$

$$\boldsymbol{z_2 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

Exercice 11

$$z_3 = \frac{3 - 4i}{2 + 2i}$$

$$|z_3| = \frac{|3-4i|}{|2+2i|}$$

$$|z_3| = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{2^2+2^2}}$$
$$\boldsymbol{|z_3| = \frac{5}{2\sqrt{2}}}$$

$$z_4 = 1 + \frac{5}{6+8i}$$

Attention, $|z_4|$ n'est pas égal à $1 + \left|\frac{5}{6+8i}\right|$

$$z_4 = \frac{6+8i}{6+8i} + \frac{5}{6+8i} = \frac{11+8i}{6+8i}$$

On peut alors calculer le module :

$$|z_4| = \frac{\sqrt{11^2+8^2}}{\sqrt{6^2+8^2}}$$
$$|z_4| = \frac{\sqrt{185}}{\sqrt{100}}$$

$$\boldsymbol{|z_4| = \frac{\sqrt{185}}{10}}$$

<u>DETERMINATION D'ANGLES ET DE LONGUEURS</u>

<u>Exercice 12</u>

a.

$$\boldsymbol{\widehat{LIJ} = \frac{\pi}{2} - r}$$
$$\boldsymbol{\widehat{LKI} = i}$$
$$\boldsymbol{\widehat{LJI} = r}$$
$$\boldsymbol{\widehat{JKI} = \pi - i}$$

b. $\frac{LI}{LK} = tan\left(\widehat{LKI}\right) = tan\ i$ Donc : $\boldsymbol{LI = LK\ tan\ i}$

c. $\frac{LI}{LJ} = tan\left(\widehat{LJI}\right) = tan\ r$ Donc : $\boldsymbol{LI = LJ\ tan\ r}$

d. On déduit des deux égalités précédentes : $\boldsymbol{LK\ tan\ i = LJ\ tan\ r}$

Exercice 13

Méthode 1 : on exprime l'aire $\mathcal{A}$ du triangle QPR de deux façons différentes.

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ QP \times QR$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ QS \times PR$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}\ QP \times QR = \frac{1}{2}\ QS \times PR$$

$$\boldsymbol{QP \times QR = \ \ QS \times PR}$$

Méthode 2 :

$$cos\left(\widehat{SRQ}\right) = \frac{QR}{PR}$$

$$cos\left(\widehat{SQP}\right) = \frac{QS}{QP}$$

Or, les angles $\widehat{SRQ}$ et $\widehat{SQP}$ sont égaux car ils sont tous deux complémentaires de l'angle $\widehat{SQR}$.

Ainsi :

$$\frac{QR}{PR} = \frac{QS}{QP}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\boldsymbol{QP \times QR = \ \ QS \times PR}$$

Exercice 14

Il suffit d'appliquer la formule de Pythagore généralisée (ou théorème d'Al Kashi) :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos\left(\hat{A}\right)$$
$$BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$BC^2 = 100 + 64 - 2 \times 10 \times 8 \times 0{,}5$$
$$BC^2 = 84$$
$$BC = 2\sqrt{21}$$
$$\boldsymbol{BC = 9{,}2\ cm}$$

Remarque : on retrouve rapidement la formule de Pythagore généralisée en écrivant :

$BC^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 15

$f' + 2f = 3$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de la forme $f' + af = b$ dont la solution est une fonction $f: x \mapsto f(x) = Ae^{-ax} + \frac{b}{a}$ où la constante d'intégration A est à déterminer avec la condition en $x = 0$ fournie par l'énoncé.

La solution est de la forme :

$$f(x) = Ae^{-2x} + \frac{3}{2}$$

On détermine la constante d'intégration avec la condition initiale :

$$f(0) = 2$$

$$A + \frac{3}{2} = 2$$

$$A = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}}$$

<u>EQUATIONS DE DROITES</u>

<u>Exercice 16</u> La représentation graphique de $T: z \mapsto T(z)$ est une droite donc T est une fonction affine.

$$T(z) = az + b$$

<u>Coefficient directeur</u> :

$a = \frac{-55-1}{10000} = \frac{-70}{10000} = -7{,}0.10^{-3}\ °C.m^{-1}$

<u>Ordonnée à l'origine lue sur le graphique</u> :

$$b = 15\ °C$$

$$\boldsymbol{T(z) = -7{,}0.10^{-3}z + 15}$$

<u>Exercice 17</u>

Pour tout point $M(x; y)$ appartenant à la droite : $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ avec $\overrightarrow{AM} = (x-2)\vec{\imath} + (y-3)\vec{\jmath}$

Ainsi :

$$\left((x-2)\vec{\imath} + (y-3)\vec{\jmath}\right).(4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = 0$$

$$4(x-2) - 2(y-3) = 0$$

D'où l'équation réduite de la droite :

$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

<u>CALCUL D'INTEGRALES</u>

<u>Exercice 18</u>

a. $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{2\pi}$

$I_1 = [\sin x]_0^{2\pi}$

$I_1 = \sin(2\pi) - \sin(0)$

$\boldsymbol{I_1 = 0}$

b. $I_2 = \int_3^5 \frac{2}{x} dx$

$I_2 = [2 \ln x]_3^5$

$I_2 = 2 (\ln 5 - \ln 3)$

$\boldsymbol{I_2 = 2 \ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

c. $I_3 = \int_1^3 (2+3x)dx$

$I_3 = [2x + \frac{3}{2}x^2]_1^3$

$I_3 = 16$

d. $I_4 = \int_0^1 xe^x dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$

Ainsi : $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$

La formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)dx$$

$$I_4 = \int_0^1 xe^x\, dx$$

$$I_4 = [\, xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx$$

$$I_4 = [\, xe^x]_0^1 - [\, e^x]_0^1$$

$$I_4 = (1 \times e^1 - 0 \times e^0) - (e^1 - e^0)$$

$$I_4 = e^0$$

$$\boldsymbol{I_4 = 1}$$

<u>LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES</u>

<u>Exercice 19</u>

$$A = 3\ln(a) + 4\ln(b)$$

$$A = \ln(a^3) + \ln(b^4)$$

$$\boldsymbol{A = \ln(a^3 b^4)}$$

$$B = \ln\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$$

$$B = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2}{4}\right)$$

$$B = \ln\left(\frac{5-1}{4}\right)$$

$$B = \ln(1)$$

$$\boldsymbol{B = 0}$$

$$C = -e^{-ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$C = -e^{ln(2)}$$
$$\boldsymbol{C = -2}$$

$$D = ln\ \left(\sqrt{e^4}\right) - ln\ \left(\sqrt{e^2}\right)$$
$$D = ln\ (e^2) - ln\ (e)$$
$$D = ln\ \left(\frac{e^2}{e}\right)$$
$$D = ln\ (e)$$
$$\boldsymbol{D = 1}$$

CONVERSIONS

Exercice 20

a. $23\ mL = 23 \times 10^{-3} L = 23 \times 10^{-6}\ m^3 = 2{,}3 \times 10^{-5}\ m^3$

b. $0{,}45\ kg = 0{,}45 \times 10^6\ \ mg = 4{,}5 \times 10^5\ mg$

c. $2{,}1\ g.cm^{-3} = 2{,}1 \times 10^{-3}\quad kg.cm^{-3} = 2{,}1 \times 10^{-3} \times 10^6\ \ kg.m^{-3} = 2{,}1 \times 10^3\ kg.m^{-3}$

d. $0{,}80\ kg.L^{-1} = 0{,}80 \times 10^3\ g.L^{-1} = 0{,}80 \times 10^3\ \ g.dm^{-3} = 0{,}80 \times 10^3\ \times 10^{-3}\ g.cm^{-3}$

Ainsi : $0{,}80\ kg.L^{-1} = 0{,}80\ g.cm^{-3}$

Remarque : pour la conversion c, quand on passe des $kg.cm^{-3}$ aux $kg.m^{-3}$ il faut multiplier et non diviser par 10^6 car l'unité de longueur est élevée à une puissance négative. Naturellement, on comprend que dans un mètre cube il y a un million de fois plus de matière que dans un centimètre cube. La même remarque s'applique à la conversion d, lorsqu'on passe des $g.dm^{-3}$ aux $g.cm^{-3}$. Dans ce cas, il y a mille fois moins de matière dans un centimètre cube que dans un décimètre cube donc on divise par mille en multipliant par 10^{-3}.