

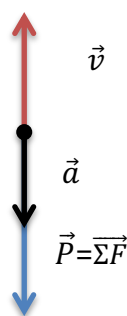
CORRECTION DE LA PARTIE D

EXERCICE D1 : mouvement vertical d'une fléchette dans un champ de pesanteur

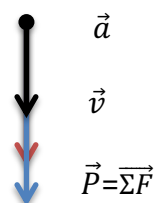
- Le système est considéré en chute libre quand on suppose que la seule force qui s'exerce sur celui-ci est son poids : on suppose donc que les forces exercées par l'air, à savoir les forces de frottement fluide et la poussée d'Archimède (qui s'exerce dès qu'un objet est plongé dans un fluide, gaz ou liquide...) sont négligeables devant le poids de l'objet.

Tout au long du mouvement, le vecteur-poids $\vec{P}$ est un vecteur constant : vertical, orienté vers le bas et de norme $P=mg=0,50\text{N}$ (attention, un vecteur constant n'a pas seulement sa norme constante mais aussi sa direction et son sens). Comme nous sommes dans le cadre de la chute libre, seul le poids s'exerce : $\vec{\Sigma F} = \vec{P}$.

- Phase de montée :



- Phase de descente :



Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la 2^{de} loi de Newton appliquée au système « fléchette », de masse m constante, conduit à : $\vec{\Sigma F} = \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ avec $\vec{p} = m\vec{v}$ le vecteur quantité de mouvement.

Le vecteur-accélération est donc lui aussi vertical vers le bas. Le vecteur-vitesse $\vec{v}$ étant tangent à la trajectoire, il est dirigé verticalement vers le haut dans la phase ascendante et verticalement vers le bas dans la phase descendante.

- Dans la phase de montée : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ont même direction et des sens opposés : le système présente un mouvement rectiligne ralenti dans le référentiel terrestre.
- Dans la phase de descente : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ont même direction et même sens : le système présente un mouvement rectiligne accéléré dans le référentiel terrestre.

Remarque : on montrera par la suite que $a=g=10\text{m.s}^{-2}$ tout au long du mouvement, la norme de l'accélération étant constante au cours des deux phases du mouvement, on considérera que la phase de montée correspond à un mouvement rectiligne uniformément ralenti et la phase de descente à un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

- conditions initiales : $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{k}$ et $\vec{OM}_0 = h_0 \cdot \vec{k}$

- système : centre de gravité de la fléchette de masse m constante.
référentiel : terrestre supposé galiléen

bilan des forces s'appliquant au système : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Seconde loi de Newton appliquée au système : $\vec{\Sigma F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$ car m reste constant.

donc $\vec{a} = \vec{g} = -g \cdot \vec{k}$

Si on projette sur l'axe (Oz), on obtient la valeur algébrique de l'accélération : $a_z = -g$. Au fil du temps, l'accélération reste constante, la fonction qui donne sa valeur algébrique à un instant t est : $\boxed{a_z(t) = -g}$.

5. Comme le vecteur-accélération est la dérivée temporelle du vecteur-vitesse, on note que : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$. Par projection, la relation devient : $\frac{dv_z}{dt} = a_z = -g$. Par intégration, on en déduit l'expression de la vitesse : $v_z(t) = -gt + C_1$. On détermine la valeur de la constante additive C_1 à l'aide de la condition initiale sur la vitesse : $\vec{v}_0 = v_o \cdot \vec{k}$: $v_z(t=0) = -g \cdot 0 + C_1 = v_o$ soit $C_1 = v_o$ donc $\boxed{v_z(t) = -g \cdot t + v_o}$.
6. Comme le vecteur-vitesse est la dérivée temporelle du vecteur-position, on note que : $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$. Par projection, la relation devient : $\frac{dz}{dt} = v_z = -g \cdot t + v_o$. Par intégration, on en déduit l'expression de la position de la fléchette à l'instant t : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + C_2$. On détermine la valeur de la constante additive C_2 à l'aide de la condition initiale sur la position : $z(t=0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + v_o \cdot 0 + C_2 = h_o$ soit $C_2 = h_o$ donc $\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + h_o}$.
7. à la date $t_1 = 0,20$ s, on obtient $v(t_1) = -10 \times 0,20 + 5,00 = 3,0 \text{ m.s}^{-1}$ et $z(t_1) = 2,6$ m.
8. La vitesse de la fléchette au sommet de la trajectoire, à l'instant t_s , est nulle. Cependant, les forces ne se compensent pas à cet instant, car la seule force qui s'exerce sur la fléchette au cours du mouvement (y compris à l'instant t_s) est son poids (qui n'est donc compensé par aucune autre force).

Attention, une erreur fréquente consiste à utiliser le principe d'inertie et à en conclure abusivement que puisque la fléchette à une vitesse nulle à l'instant t_s alors les forces se compensent : n'oubliez pas que son énoncé correct est « le système persévère dans sa situation de repos ou de mouvement rectiligne uniforme » ; dans notre cas de figure, la fléchette ne persévère pas dans un état de repos, les forces ne se compensent donc pas.

La date à laquelle le sommet de la trajectoire est atteint est : $v_z(t_s) = -g \cdot t_s + v_o = 0$.

Soit $\boxed{t_s = \frac{v_o}{g}}$; A.N : $t_s = 0,50$ s.

9. $z(t_s) = -\frac{1}{2}gt_s^2 + v_o t_s + h_o$ soit $H = z(t_s) - h_o = -\frac{1}{2}gt_s^2 + v_o t_s$

Comme $t_s = \frac{v_o}{g}$, $H = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_o}{g}\right)^2 + v_o \left(\frac{v_o}{g}\right)$ soit $\boxed{H = \frac{v_o^2}{2g}}$ A.N : $H = 1,25\text{m} = 1,3\text{m}$; ce qui correspond à une altitude maximale atteinte, par rapport au sol, égale à $z(t_s) = H + h_o = 2,9\text{m}$.

10. La seule force s'exerçant sur le système est le poids, qui est une force conservative (dérivant d'une énergie potentielle : l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = mgz + C$).

On définit arbitrairement l'origine de E_{pp} au niveau du sol, d'altitude $z=0$, soit $E_{pp}(0) = C = 0$ d'où $E_{pp}(z) = mgz$. Lorsque les seules forces qui travaillent au sein d'un système sont conservatives, comme c'est le cas ici, alors il y a conservation de l'énergie mécanique au fil du temps. Ainsi, $E_m(M_o) = E_m(S)$ donc $\frac{1}{2}mv_o^2 + mgz(M_o) = 0 + mgz(S)$ donc $mgH = \frac{1}{2}mv_o^2$ soit $\boxed{H = \frac{v_o^2}{2g}}$. A.N : $H = 1,3\text{m}$, ce qui correspond à une altitude maximale atteinte, par rapport au sol, égale à $z(t_s) = H + h_o = 2,9\text{m}$.

11. Le point où la pierre touche le sol correspond en fait à l'origine O, on peut, par exemple, utiliser la conservation de E_m entre le point M_o et le point O pour déterminer v_f .

Ainsi, $E_m(M_o) = E_m(O)$ donc $\frac{1}{2}mv_o^2 + mgz(M_o) = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz(O)$ donc $mgh_o + \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$

soit $\boxed{v_f = \sqrt{v_o^2 + 2gh_o}}$. A.N : $v_f = 7,8 \text{ m.s}^{-1}$. Attention, comme la fléchette présente un mouvement dirigé vers le bas quand elle touche le sol, la valeur algébrique de sa vitesse est donc négative : $v_z(t_f) = -v_f = -7,8 \text{ m.s}^{-1}$.

On peut donc en déduire la date t_f correspondante à l'aide de l'équation horaire de la vitesse : $v_z(t_f) = -g \cdot t_f + v_o = -v_f$; soit $\boxed{t_f = \frac{v_f + v_o}{g}}$. A.N : $t_f = 1,28\text{s} = 1,3\text{s}$

Remarque : on observe que dans ces dernières questions aucune des formules littérales obtenues pour la vitesse ou la position ne dépend de la masse m du système : la fléchette, même si elle avait été bien plus légère ou bien plus lourde, aurait eu le même mouvement (à condition de rester dans le cadre de validité de la chute libre)... Ce résultat est généralisable pour tous les mouvements en chute libre.

EXERCICE D2 : le saut du motard

Phase d'élan

1. C'est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié (et plus généralement les lois de Newton).
2. Les caractéristiques du « poids » du motard, force exercée par la Terre, sont :
 - point d'application : centre de gravité du système {motard+moto}
 - direction : verticale
 - sens : vers le bas
 - intensité : $P = mg = 280 \times 10 = 2,8 \times 10^3 \text{ N} = 2,8 \text{ kN}$
3. Sur le trajet OA le système est en mouvement rectiligne accéléré. Ainsi, puisque nous ne sommes pas dans les conditions d'application du principe d'inertie (il n'est ni au repos ni en mouvement rectiligne uniforme), on en déduit, conformément à la seconde loi de Newton, que les forces qui s'exercent sur lui ne se compensent pas : il n'est pas pseudo-isolé. (on rappelle qu'un système est isolé quand aucune force ne s'applique sur lui et qu'un système est pseudo-isolé quand les forces extérieures qui s'y appliquent se compensent).

4. Sur la portion OA de route, les forces qui s'exercent sur le système {motard+moto} sont :

- son poids $\vec{P}$
- la réaction normale du support (du sol) $\vec{R}_n$
- la force de propulsion de la moto $\vec{F}$
- les forces de frottement $\vec{f}$

La force de propulsion et la force de frottements subies par le système s'exercent horizontalement ; le poids et la réaction normale du sol s'exercent verticalement. Le mouvement se déroule selon l'axe horizontal (Ox), les forces s'exerçant sur l'axe vertical (Oy) se compensent donc : $\vec{P} = -\vec{R}_n$

Les caractéristiques de la réaction normale du sol sont :

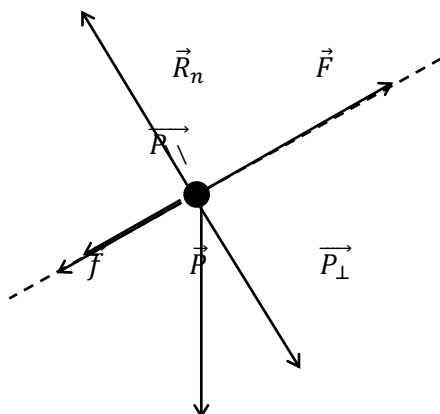
- direction : verticale
- sens : vers le haut
- intensité : $R_n = P = mg = 280 \times 10 = 2,8 \times 10^3 \text{ N}$
- point d'application : centre de la surface de contact sol / système {motard+moto}

5. Calcul de l'accélération moyenne du système sur la portion OA :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_A - v_O}{t_A - t_O} = \frac{30 - 0}{6,0 - 0} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

6. Le mouvement sur le tremplin est rectiligne et uniforme (vitesse constante) dans le référentiel terrestre supposé galiléen, donc d'après la première loi de Newton (principe d'inertie), le système est soumis à des forces qui se compensent : il est pseudo-isolé.
7. Sur le tremplin, les forces qui s'exercent sur le système {motard+moto} sont toujours : $\vec{P}$, $\vec{R}_n$, $\vec{F}$ et $\vec{f}$. On peut décomposer le poids en deux composantes (une composante parallèle au mouvement et une composante perpendiculaire au mouvement : $\vec{P} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_{\parallel}$).

Il faut veiller sur le schéma à ce que $\vec{P}_\perp = -\vec{R}_n$ (les forces perpendiculaires au mouvement se compensent entre elles) et à ce que $\vec{F} = -(\vec{f} + \vec{P}_{\parallel})$. (les forces parallèles au mouvement se compensent entre elles).



Phase de saut

1. Le vecteur vitesse du système au point B de coordonnées (0,h) est : $\vec{v}_B \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \\ v_A \cdot \sin \beta \end{pmatrix}$

le vecteur position au point B est $\vec{O'B} \begin{pmatrix} 0 \\ L \sin \beta \end{pmatrix}$

2. Système : {motard+moto}
 Référentiel : terrestre supposé galiléen
 Bilan des forces pour le système : poids (chute libre).
 D'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \text{ car la masse du système est constante}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

3. En recherchant la primitive pour chaque composante du vecteur précédent on arrive à : $\vec{v} \begin{pmatrix} cste \\ -gt + cste' \end{pmatrix}$

Or à l'origine du temps $t_B=0$, on a $\vec{v}_B \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \\ v_A \cdot \sin \beta \end{pmatrix}$:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} cste \\ -g \times 0 + cste' \end{pmatrix} = \vec{v}_B \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \\ v_A \cdot \sin \beta \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad : \quad \begin{cases} cste = v_A \cdot \cos \beta \\ cste' = v_A \cdot \sin \beta \end{cases} \text{ soit : } \boxed{\vec{v} \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \\ -g \times t + v_A \cdot \sin \beta \end{pmatrix}}$$

En intégrant à nouveau on arrive au vecteur position du système : $\vec{O'G} : \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \times t + cste \\ -\frac{g}{2} \times t^2 + v_A \cdot \sin \beta \times t + cste' \end{pmatrix}$

Or, à l'origine du temps le système G est confondu avec le point B (0 ; h) donc :

$$\vec{O'G} \begin{pmatrix} v_A \cdot \cos \beta \times t \\ -\frac{g}{2} \times t^2 + v_A \cdot \sin \beta \times t + h \end{pmatrix}$$

conclusion

Les équations horaires de la vitesse sont :

Les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} v_x = v_A \cdot \cos \beta \\ v_y = -g \times t + v_A \cdot \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_A \cdot \cos \beta \times t \\ y(t) = -\frac{g}{2} \times t^2 + v_A \cdot \sin \beta \times t + h \end{cases}$$

4. La fonction $v_y(t)$ est de la forme d'une fonction affine $v_y(t) = At + B$ avec des constantes A et B telles que $A < 0$ et $B > 0$; elle est représentée par la courbe 3 (on vérifie que la courbe est bien une droite de pente négative et d'ordonnée à l'origine positive).
5. La fonction $v_x(t)$ est de la forme d'une fonction constante $v_x(t) = C$ avec une constante $C > 0$; elle est représentée par la courbe 4 de la question II.6.
6. La fonction $x(t)$ est de la forme d'une fonction linéaire $x(t) = D.t$ avec la constante $D > 0$: elle est représentée par la courbe 1.
7. Lorsque le système arrive au sommet S de sa trajectoire, on a $v_y = 0$ (le vecteur-vitesse est tangent à la

trajectoire et donc horizontal). Donc : $0 = -g \times t_S + v_A \cdot \sin \beta \Leftrightarrow t_S = \frac{v_A \cdot \sin \beta}{g} = 1,5s$

Ainsi, l'altitude du point S est $H_{\max} = y(t_S) = -\frac{g}{2} \times \left(\frac{v_A \cdot \sin \beta}{g} \right)^2 + v_A \cdot \sin \beta \times \frac{v_A \cdot \sin \beta}{g} + h$

$$\Leftrightarrow H_{\max} = y(t_S) = \frac{v_A^2 \cdot \sin^2 \beta}{2g} + h \text{ avec } h = L \cdot \sin \beta \text{ soit } H_{\max} = 11,25 + 5,0 = 16,3 \text{ m.}$$

8. Rappelons les équations horaires du mouvement:
$$\begin{cases} x(t) = v_A \cdot \cos \beta \times t \\ y(t) = -\frac{g}{2} \times t^2 + v_A \cdot \sin \beta \times t + h \end{cases}$$

De la première équation, on tire : $t = \frac{x}{v_A \cdot \cos \beta}$, que l'on injecte dans la seconde pour obtenir l'équation du mouvement : $y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_A^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2 + \tan \beta \cdot x + h$

L'équation est de la forme : $y = Ax^2 + Bx + C$ avec A, B et C des constantes ; c'est donc une parabole.

9. Le motard retombe sur le sol au point de coordonnées (D ; 0). En injectant dans l'équation du mouvement, on obtient : $0 = -\frac{g}{2 \cdot v_A^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot D^2 + \tan \beta \cdot D + h$.

Il faut donc résoudre une équation du second degré, vérifiée par D. on obtient finalement que D = 86 m

10. Pour augmenter la portée de son saut, le motard peut augmenter la valeur de sa vitesse initiale (la phase d'accélération doit être plus longue, et évidemment, le moteur assez puissant pour cela) et/ou ajuster l'inclinaison du tremplin pour arriver à un angle optimal de 45° .

Démonstration (pour ceux qui veulent tout comprendre) :

Si on a une équation horaire du mouvement de la forme : $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g t^2 + v_A \cdot \sin \beta \cdot t$, on peut déterminer l'instant t pour lequel l'altitude est nulle : $y=0$ pour $t=0$ (point de lancer situé au niveau du sol) ou pour $t = \frac{2v_A \cdot \sin \beta}{g}$ (instant où le projectile touche à nouveau le sol).

On peut ainsi exprimer la portée $D = x(t) = v_A \cdot \cos \beta \cdot \frac{2v_A \cdot \sin \beta}{g} = \frac{2v_A^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{g} = \frac{v_A^2 \cdot \sin(2\beta)}{g}$ car $\sin(2\beta) = 2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta$

Donc la portée D sera maximale pour $\sin(2\beta)=1$ soit $2\beta=90^\circ$ et donc pour $\beta=45^\circ$

EXERCICE D3 : La planète Mars

On observe que la planète Mars décrit autour du Soleil une orbite circulaire uniforme de rayon r à la vitesse v. On admet que la planète Mars et le Soleil ont une répartition de masse à symétrie sphérique. On note T_M la période de révolution de la planète Mars autour du Soleil.

1. Référentiel héliocentrique supposé galiléen.

2. Accélération de Mars : dans le cadre d'un mouvement circulaire uniforme, on sait que $\vec{a}$ est centripète et pointe donc vers le soleil à chaque instant (le vecteur accélération est de sens opposé au vecteur unitaire qui

lui pointe vers Mars). Sa norme vaut : $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{r}$ donc, son expression vectorielle est $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}$.

3. Force exercée par le Soleil sur Mars= force d'interaction gravitationnelle attractive, de norme :

$$F_{S \rightarrow M} = G \frac{M_S M_M}{r^2}$$
 Cette force étant attractive, le vecteur-force associé est dirigé vers le soleil (donc centripète). La relation vectorielle associée est : $\vec{F}_{S \rightarrow M} = -G \frac{M_S M_M}{r^2} \cdot \vec{u}$

4. Système : centre d'inertie de mars.

Référentiel : héliocentrique supposé galiléen

Bilan des forces appliquées au système : $\overrightarrow{F_{S \rightarrow M}}$

On applique la 2de loi de Newton au système : $M_M \vec{a} = -G \frac{M_S M_M}{r^2} \cdot \vec{u} = -M_M \frac{v^2}{r} \vec{u}$

Par identification on obtient que $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$

5. Mars réalise une révolution complète sur son orbite circulaire de périmètre $P = 2\pi r$ pendant la durée T_M , appelée période de révolution, à la vitesse v : ainsi, on peut écrire que : $v = \frac{2\pi r}{T_M}$

Les deux expressions de la vitesse sont donc : $v = \frac{2\pi r}{T_M} = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$ ce qui conduit en élevant cette expression au

carré à $\frac{T_M^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ qui constitue la troisième loi de Kepler (valable pour tout satellite tournant autour de S)

$$6. \quad r = \left(\frac{T_M^2 GM_S}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ m} = \underline{2,3 \cdot 10^8 \text{ km}}$$

ce qui permet de calculer $F = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ N}$ puis $v = 2,4 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ et enfin $a = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$

7. Troisième loi de Kepler (valable pour tous les satellites autour de Mars et donc pour Phobos) : $\frac{T_P^2}{r_P^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M}$

où $r_P = R_M + h$ soit $T_P = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_M + h)^3}{GM_M}}$ A.N : $T_P = 7 \text{ h } 38 \text{ min}$

8. a) $P = m \times g_{Mars} \Rightarrow g_{Mars} = \frac{P}{m}$ A.N : $g_{Mars} = 3,8 \text{ m.s}^{-2}$

b) or en 1^{ere} approximation on peut assimiler le poids à la force d'attraction gravitationnelle : $P \equiv F = G \frac{M_M m}{R_M^2}$

soit $g_{mars} = G \frac{M_M}{R_M^2}$ A.N : $g_{mars} = 3,8 \text{ m.s}^{-2}$

c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$; la période des petites oscillations d'un pendule simple dépend de la valeur de g ; g et donc T

diffèrent sur Terre et sur Mars. $\frac{T_0}{T_M} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{Terre}}}}{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{Mars}}}} = \sqrt{\frac{g_{Mars}}{g_{Terre}}}$ d'où $T_M = \sqrt{\frac{g_{Terre}}{g_{Mars}}} T_0$ A.N : $T_M = 1,6 \text{ s pour}$

$T_0 = 1,0 \text{ s.}$

d) $L = \frac{g_{Terre} T_0^2}{4\pi^2} = \frac{g_{Mars} T_M^2}{4\pi^2}$ A.N : $L = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm.}$