

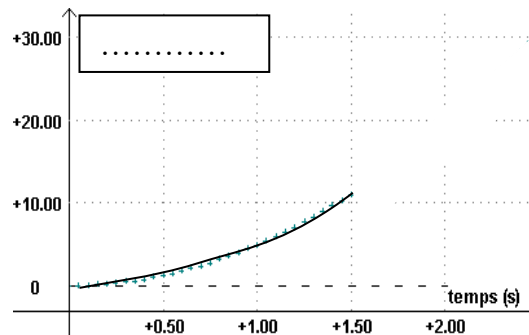
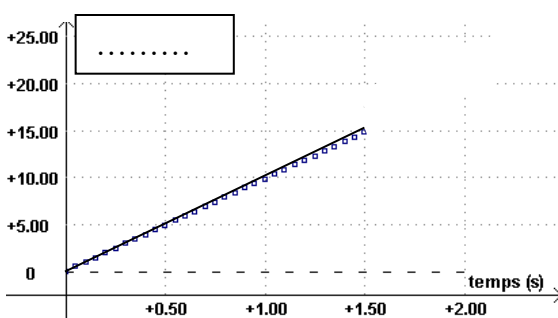
ACTIVITE DE REVISION : étude du mouvement d'objets ponctuels dans le champ de gravitation uniforme (les corrigés sont à la fin du document)

A. CHUTE LIBRE SANS VITESSE INITIALE $v_0=0 \text{ m.s}^{-1}$

Situation problème : on laisse tomber une balle depuis le 2^{ème} étage du lycée, on la lâche sans vitesse initiale. On filme cette expérience et on repère, image par image, les positions successives de la balle. On définit le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, l'origine O du repère étant la position de la balle à l'instant $t=0\text{s}$, l'axe (Oz) étant un axe vertical dirigé vers le bas.

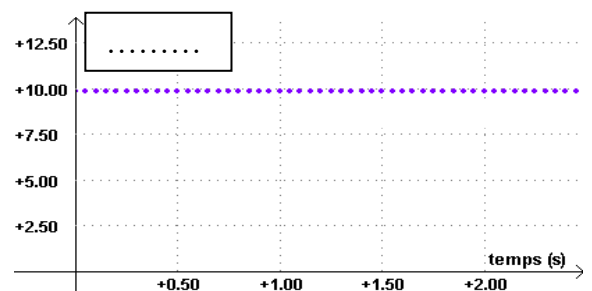
A l'aide de Latispro, on fait défiler le film image par image afin de relever les coordonnées des positions successives G_i de la balle et le logiciel calcule les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération correspondants.

1. Les trois graphes ci-dessous représentent l'évolution au cours du temps des coordonnées $z(t)$, $v_z(t)$ et $a_z(t)$ du centre d'inertie G de la balle.
 - a. Identifiez chaque graphe, en expliquant soigneusement votre raisonnement, et compléter l'ordonnée. En déduire la nature du mouvement.
 - b. En étudiant les trois graphes, déterminer la durée Δt de la chute, la hauteur totale H de la chute, la vitesse v_{finale} de la balle atteignant le sol.



2. En utilisant la seconde loi de Newton, déterminer les équations horaires de l'accélération, de la vitesse et de la position.

3. Exprimer les équations horaires du mouvement à l'instant $t=1,50\text{s}$ où la balle touche le sol : on détermine ainsi la hauteur $z=H$ de chute et la vitesse finale v_{finale} . Est-ce cohérent avec vos lectures graphiques?



B. CHUTE LIBRE AVEC VITESSE INITIALE VERS LE BAS

Situation problème : Mathieu lance une balle vers le bas avec une vitesse initiale $v_0=5,0 \text{ ms}^{-1}$.

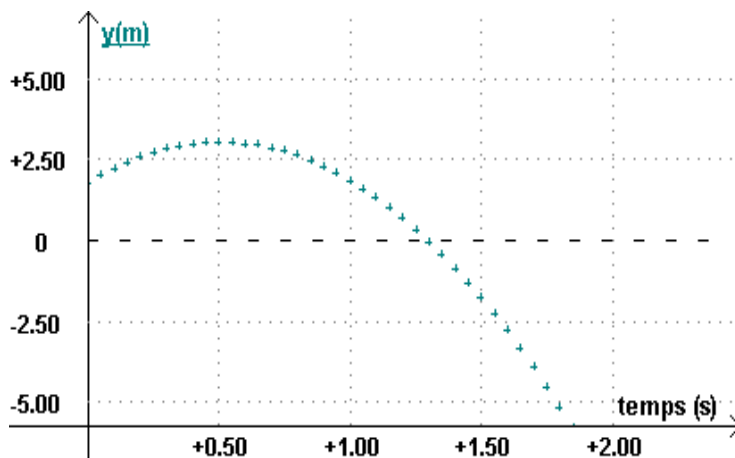
L'origine des axes coïncide avec la position initiale de la balle c'est-à-dire qu'à $t=0\text{s}$ $Y=0$. L'axe Oy est toujours vers le bas.

1. Faire un schéma de la situation et représenter le vecteur $\vec{v}_0$.
2. Quelle est la nature du mouvement attendu ?
3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur cette balle en chute libre lancée avec une vitesse initiale.
4. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$.
5. Etablir l'équation horaire des coordonnées de la vitesse et celle des coordonnées de la position.
6. Déterminer la distance parcourue par la balle au bout d'une durée $\Delta t=1,5\text{s}$.

C. CHUTE LIBRE AVEC VITESSE INITIALE VERS LE HAUT

Situation problème : Martin veut étudier le mouvement de la fléchette tirée par son pistolet. Négligeant l'action de l'air et en prenant $g=10 \text{ m.s}^{-2}$ pour l'intensité de pesanteur, il considère la fléchette comme un objet ponctuel dont la masse m est de 50g. A l'instant initial, il tire la fléchette vers le haut en se penchant au dessus d'un pont, la fléchette est à cet instant à 1,80m de hauteur par rapport aux pieds de martin. la vitesse initiale verticale v_0 est de $5,0 \text{ m.s}^{-1}$. **On oriente cette fois l'axe (Oy) vers le haut on choisit l'origine au niveau des pieds de martin.**

- 1- Faire un dessin de la situation en représentant la fléchette, le sol et le choix des axes et le vecteur $\vec{v}_0$.
- 2- Quelle est la nature du mouvement attendu sur les deux phases du mouvement (montée puis descente)?
- 3- En suivant les étapes du cours, déterminer l'équation horaire $v_y(t)$ de la vitesse.
- 4- En utilisant l'équation horaire $v_y(t)$, dire à quel instant t la fléchette atteindra son altitude maximale. retrouver la valeur sur le graphe.
- 5- Déterminer la hauteur atteinte par la fléchette à l'aide de l'équation horaire de la position et retrouver cette valeur sur le graphe $y=f(t)$.
- 6- la masse de la fléchette a-t-elle une quelconque influence sur le mouvement ?



D. CHUTE LIBRE AVEC VITESSE INITIALE VERS LE HAUT ET L'AVANT

rappel des étapes de résolution à partir d'un exemple

On lance une balle de masse m depuis le point G_0 de coordonnées (x_0, y_0) avec un vecteur-vitesse initial incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il faut retrouver les équations horaires ainsi que la trajectoire de la balle.

Démarche à adopter

- ❶ - Système et référentiel
 - Bilan des forces (si dans l'air, la chute est considérée comme libre, on néglige les forces de frottements et la poussée d'Archimède : il ne reste que le poids).
- ❷ - Seconde loi de Newton : relation vectorielle
- ❸ - Choix d'un système d'axes (Oxy) sur le plan vertical dans lequel se déroule le mouvement ; détermination des 2 coordonnées du vecteur-accelération, du vecteur-vitesse et du vecteur-position en fonction du temps par projection $\rightarrow$ on trouve ainsi les équations horaires de l'accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$, les équations horaires de la vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$, puis pour finir les équations horaires de la position $x(t)$ et $y(t)$.
- ❹ - Equation du mouvement $y=f(x)$ appelée trajectoire, déduite de $x(t)$ et de $y(t)$.

Détaillons maintenant ces 4 étapes...

1- Système, Référentiel et bilan des forces

- ⊙ Système : centre d'inertie de la balle de masse m
- ⊙ Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen.
- ⊙ Inventaire des forces extérieures exercées sur le système :

- Action de la terre sur le système : Le poids : $\vec{P}$ de norme $P=mg$
- Action du fluide sur le système : la force de frottement : $\vec{f}$ et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$

- ⊙ Forces négligeables ?

Vous pouvez calculer le rapport $P/F_A = \rho_{\text{balle}} V g / \rho_{\text{air}} V g = \rho_{\text{balle}} / \rho_{\text{air}}$ pour montrer que la poussée d'archimède est négligeable ce qui revient à montrer que la masse volumique de l'objet est très supérieure à celle du fluide déplacé (l'air en général), pour les forces de frottements vos arguments resteront qualitatifs : forme aérodynamique et lisse de l'objet, faible hauteur de chute, fluide peu visqueux, etc...).

Hypothèses : $\vec{f}$, $\vec{F}_A$ sont des forces négligeables devant le poids $\vec{P}$. **On parle de chute libre dans le champ de pesanteur.**

2-Seconde loi de Newton, relation vectorielle

☺ 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ applicable car on travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

avec m masse du système $\vec{a}$ vecteur accélération du centre d'inertie du système.

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_A = m\vec{a} \text{ soit } \vec{P} = m\vec{a} \text{ puisque } \vec{f} \text{ et } \vec{F}_A \text{ sont négligeables. d'où } m\vec{g} = m\vec{a} \text{ soit } \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Le vecteur $\vec{g}$ est constant (direction sens et valeur) donc $\vec{a}$ aussi, le mouvement est uniformément varié.

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant et indépendant de la masse du système : **une balle en polystyrène aura la même accélération qu'une balle de plomb.**

3- Projection sur les 2 axes du plan et équations horaires

☺ Choix d'un système d'axes

=> repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un plan suffit (inutile de se mettre dans l'espace à 3D)

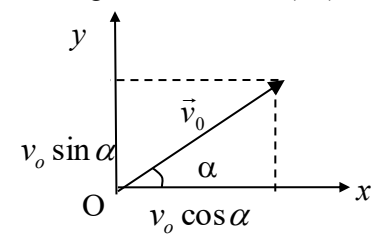
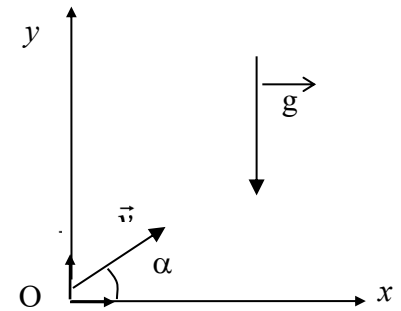
(il faut représenter dessus les vecteur $\vec{g}$ symbolisant le champ de pesanteur).

☺ Repérage des conditions initiales dans le texte

A l'instant initial $t=0$ s :

- La position initiale du centre d'inertie de l'objet est l'origine O du repère

- Le projectile est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme v_0 selon un angle de tir α qui est l'angle entre $\vec{v}_0$ et (Ox)



$$\overrightarrow{OG}_O \begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{cases} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

☺ **ETAPE 1 : Coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$**

$$\bullet \vec{a} = \vec{g} \quad \text{Comme : } \vec{a} \begin{cases} a_x \\ a_y \end{cases} \text{ et } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \text{ coordonnées ne dépendant pas du temps donc à chaque instant } \vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

norme : $a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = g = \text{cste}$ l'accélération vaut 9,8 m/s à chaque instant.

☺ **ETAPE 2 : Coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction du temps**

$$\bullet \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ soit : } \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y = -g \end{cases} \quad \text{g est une constante} \quad \text{ainsi : } \vec{v} \begin{cases} v_x = C1 \\ v_y = -gt + C2 \end{cases}$$

• Détermination de C1 et de C2 (en fonction des données de l'énoncé) en utilisant les conditions initiales.

$$\text{A } t=0\text{s, } \begin{cases} v_x(0) = C1 = v_0 \cos \alpha \\ v_y(0) = C2 = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \alpha \text{ et } v_0 \text{ sont des constantes (elles ne dépendent pas du temps)}$$

$$\text{Donc à t quelconque, on a l'équation horaire du vecteur-vitesse : } \vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{Norme du vecteur-vitesse : } v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$$

La norme v de la vitesse varie au cours du temps (mouvement successivement ralenti puis accéléré), mais on remarque que la projection de la vitesse sur l'axe (Ox) est constante : mouvement uniforme en projection sur l'axe (Ox)

☺ **ETAPE 3 : Coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}(t)$ avec $G(x(t), y(t))$ le centre d'inertie de la balle**

$$\bullet \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \text{ donc : } \overrightarrow{OG} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = vx = v_0 \cos \alpha = \text{cste} \\ \frac{dy}{dt} = vy = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \times t + C4 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + C5 \end{cases}$$

➔ Calcul de C4 et C5 à l'aide des conditions initiales, dans le cas le plus courant où l'objet part de l'origine à l'instant $t=0$:

$$\text{A } t=0, \text{ on obtient : } \begin{cases} x(0) = C4 = 0 \\ y(0) = C5 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } C4=0 \text{ et } C5=0.$$

La projection du mouvement suivant l'axe horizontal (Ox) est uniforme ($v_x = \text{cste}$)

La projection du mouvement suivant l'axe vertical (Oy) est uniformément variée. ($a_y = \text{cste}$)

➔ Calcul de C4 et C5 à l'aide des conditions initiales, si l'objet part d'un point de coordonnées $G_0(x_0, y_0)$

$$\text{A } t=0, \begin{cases} x(0) = C4 = x_0 \\ y(0) = C5 = y_0 \end{cases} \quad \text{donc } C4=x_0 \text{ et } C5=y_0.$$

Equation horaire paramétrique du mouvement à t quelconque en partant de $G_0(x_0, y_0)$:

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \times t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + y_0 \end{cases}$$

4- Equation de la trajectoire

Il faut déterminer la fonction $y=f(x)$. Il faut donc éliminer le temps.

Méthode : partir de l'équation horaire $x(t)$ et exprimer t en fonction de x et injecter l'expression dans l'équation horaire $y(t)$.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{donc} \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad \text{de la forme } y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

avec C_1, C_2 et C_3 des constantes.

La trajectoire du centre d'inertie d'un projectile lancé avec une vitesse initiale quelconque est donc une portion de parabole.

5- Influence des conditions initiales

On appelle **portée du lancer** la distance D atteinte par la balle lorsqu'elle retombe sur le même plan horizontal que le point de départ et **flèche du lancer** la hauteur maximale H atteinte par la balle.

La trajectoire dépend des conditions initiales v_0 et α .

Les questions souvent posées :

Déterminer la valeur de la vitesse à un instant t_1 donné : Il faut utiliser les équations horaires de la vitesse pour déterminer la valeur de $v_x(t_1)$ et $v_y(t_1)$ et en déduire la norme grâce à la somme quadratique : $v(t_1) = (v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1))^{1/2}$

Déterminer l'instant $t_{\text{flèche}}$ pour lequel l'objet atteint sa hauteur maximale H : il faut considérer que le vecteur vitesse est horizontal car tangent à la trajectoire donc $v_y(t_{\text{flèche}}) = -g \cdot t_{\text{flèche}} + v_0 \cdot \sin \alpha = 0$ soit $t_{\text{flèche}} = v_0 \cdot \sin \alpha / g$.

Déterminer la hauteur H de la flèche (c'est-à-dire la hauteur maximale atteinte) : on exprime l'équation horaire $y(t)$ à l'instant $t_{\text{flèche}} = v_0 \cdot \sin \alpha / g$ car $y(t_{\text{flèche}}) = H$.

portée du tir D et instant t_D où l'objet touche le sol : Dans l'équation de la trajectoire $Y=f(X)$ on pose $Y = 0$ et $X=D$ et on résout l'équation ayant pour variable D . on utilise l'équation horaire du mouvement $Y=f(t)$ et on pose $Y=0$ et $t=t_D$ et on résout l'équation ayant pour variable t_D .

Exercice d'application (un peu calculatoire et fastidieux) : basket-ball

On étudie les tirs de basket-ball de manière simplifiée. On travaille dans un champ de pesanteur uniforme. On suppose que le joueur est face au panneau à une distance D de ce dernier. Le cercle du panier est situé à une hauteur $H=3,05$ m au-dessus du sol et on assimilera dans un premier temps le cercle à un point situé sur le panneau. De même le ballon sera considéré comme ponctuel. On néglige les frottements fluides de l'air. Le joueur tire d'une hauteur $h=2,00$ m au-dessus du sol en imposant une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. La masse du ballon est de l'ordre de 500g et son diamètre de 24 cm.

1. Etablir l'équation du mouvement du ballon lors du tir (on appelle ainsi la relation vectorielle faisant intervenir l'accélération résultat de la relation fondamentale de la dynamique (2^{ème} loi de Newton)).
2. En déduire les équations horaires de ce mouvement.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire du ballon.
4. On suppose que le module de la vitesse initiale est fixé. Donner l'équation à vérifier par l'angle α pour que le panier soit marqué. On la mettra sous la forme d'une équation du second degré en $\tan \alpha$. Aide : on rappelle que $1/\cos^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) / \cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.
5. Montrer que cette équation n'admet des solutions (ou du moins des solutions acceptables au sens physique, c'est à dire réelles) que si le module v_0 de la vitesse initiale vérifie une inéquation du second degré en v_0^2 .
6. En déduire l'existence d'une valeur minimale de v_0 pour que le panier soit marqué.
7. Faire l'application numérique pour un lancer franc (la distance D vaut alors 4,60m) puis pour un panier à 3 points ($D=6,25$ m).
8. Si la condition précédente est vérifiée, donner l'expression de $\tan \alpha$ et en déduire qu'il existe deux angles possibles pour marquer le panier.
9. Donner les valeurs numériques des angles α permettant de marquer un lancer franc en supposant que $v_0 = 10,0 \text{ m.s}^{-1}$.

Ce que je dois retenir après avoir travaillé l'exercice basket-ball

Le mouvement est parabolique : deux angles sont donc possibles pour atteindre un même point (X,Y) : un tir en cloche ($\alpha > 45^\circ$) et un tir tendu ($\alpha' < 45^\circ$)

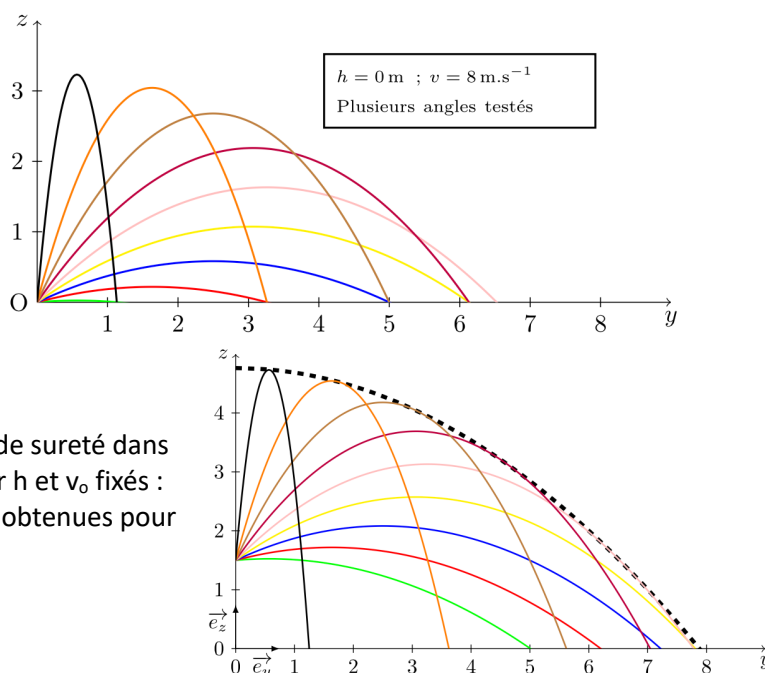
L'équation du mouvement $y=f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'une équation du 2^d degré vérifiée par la grandeur $\tan \alpha \rightarrow a.\tan^2 \alpha + b.\tan \alpha + c = 0$ qui présente des solutions réelles ssi $\Delta \geq 0$.

Si $\Delta = 0$, une seule valeur de α est possible.

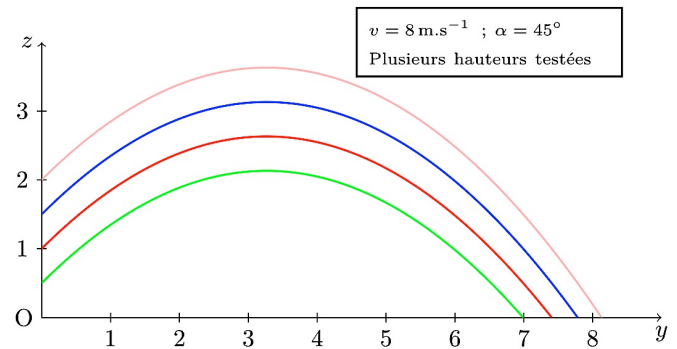
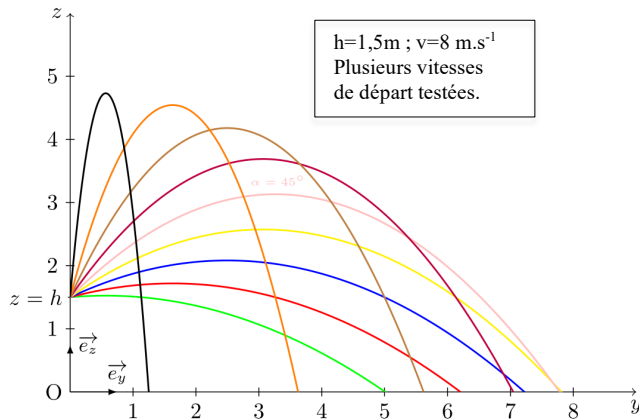
Si $\Delta > 0$, deux valeurs de α sont possibles telles que $\alpha_1 = \pi/2 - \alpha_2$.

On remarque également que c'est un angle de 45° qui induit la plus grande portée (résultat valable seulement si $z(0)=0$).

On définit ainsi une parabole dite parabole de sûreté dans laquelle toutes les trajectoires sont incluses pour h et v_0 fixés : c'est la parabole qui passe par toutes les flèches obtenues pour des angles différents.



D'autres facteurs qui influent sur la portée et la flèche du tir interviennent : la vitesse initiale et la hauteur initiale du tir.



Eléments de correction des exercices

A. chute libre sans vitesse initiale

mouvement de chute libre sans vitesse initiale : rectiligne uniformément accéléré dans le référentiel terrestre

courbe du bas : $a_z(t) \rightarrow$ chute libre donc $\vec{a} = \vec{g}$ (d'après la RFD), a_z est donc constante au fil du temps et vaut $a_z = a = 10\text{ m.s}^{-2}$

courbe en haut à gauche : $v_z(t) \rightarrow$ vitesse initiale nulle et $v_z(t) = a_z t + v_{z0} = gt + v_{z0} = 10t$ ($v_z = f(t)$ est une droite passant par l'origine). On observe que la pente de la tangente à $v_z = f(t)$ reste constante au fil du temps ce qui est logique car elle donne la valeur de l'accélération.

courbe en haut à droite : $z(t) \rightarrow z(t) = a_z t^2 / 2 + v_{z0} t + z_0 = gt^2 / 2 + v_{z0} t + z_0 = 5t^2$ (parabole passant par l'origine). On observe que la pente de la tangente à $z = f(t)$ augmente constante au fil du temps ce qui est logique car elle reflète l'évolution de la vitesse.

Par lecture graphique et en utilisant des équations horaires, on obtient dans les deux cas :

$\Delta t = 1,50\text{s}$, $H = 11,5\text{m}$; $v_f = 15\text{ m.s}^{-1}$.

B. chute libre avec vitesse initiale vers le bas

mouvement de chute libre avec vitesse initiale dans le même sens que le poids : rectiligne uniformément accéléré dans le référentiel terrestre.

$a_y(t) = g = 10$ (car Oy dirigé vers le bas)

$v_y(t) = gt + v_{y0} = 10t + 5$

$y(t) = gt^2 / 2 + v_{y0} t + y_0 = 5,0.t^2 + 5,0.t$

distance parcourue : $y(t=1,5\text{s}) = 5,0 \times 1,5^2 + 5,0 \times 1,5 = 19\text{m}$.

C. chute libre avec vitesse initiale vers le haut

mouvement de chute libre avec vitesse initiale de sens opposé au poids : rectiligne uniformément ralenti pendant la montée et rectiligne uniformément accéléré durant la descente dans le référentiel terrestre.

$a_y(t) = -g = -10$ (car Oy dirigé vers le haut) avec $g = 10\text{ m.s}^{-2}$

$v_y(t) = -gt + v_{y0} = -10t + 5,0$

$y(t) = -gt^2 / 2 + v_{y0} t + y_0 = -5,0.t^2 + 5,0.t + 1,80$

$-g.t_{\max} + v_0 = 0$ (car $v = 0$ en haut de la trajectoire) soit $t_{\max} = 0,50\text{s}$.

$y_{\max} = -gt_{\max}^2 / 2 + v_{y0} t_{\max} + y_0 = 3,1\text{m}$.

les équations horaires ne sont pas fonction de m , donc la masse de l'objet en chute libre n'influe pas sur son mouvement.

D. Basket-ball

1) Système : centre d'inertie du ballon de basket de masse m

Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen.

Le mouvement se déroule dans le plan (xOy).

Cinématique : $\vec{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y$; $\vec{v} = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y$; $\vec{a} = \ddot{x}.\vec{u}_x + \ddot{y}.\vec{u}_y$

Inventaire des forces extérieures exercées sur le système :

- Action de la terre sur le système : Le poids : $\vec{P}$ de norme $P=mg$
- Action du fluide sur le système : la force de frottement fluide de l'air : $\vec{f}$ et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$

Forces négligeables ? L'énoncé indique que la force de frottement était négligeable devant le poids. Le rapport $P/F_A = mg/\rho_{\text{air}}Vg = 500$: la poussée d'archimède est négligeable devant le poids. On est dans une situation de chute libre dans le champ de pesanteur.

RFD : $m\vec{g} = m\vec{a}$ soit $\vec{g} = \vec{a}$

2) A l'issue du processus de détermination des équations horaires de la vitesse et de la position , en tenant compte des CI:

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \vec{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + h \end{cases}$$

3) équation de la trajectoire $y=f(x)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \text{ donc } y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x + h \quad \text{de la forme } y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

avec C_1, C_2 et C_3 des constantes : trajectoire hyperbolique.

4) le ballon doit passer par le point de coordonnées $(x=D ; y=H)$.

$$H = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} D^2 + \tan \alpha \cdot D + h \quad \text{or, } 1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha \text{ soit } H = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha \cdot D^2 + \tan \alpha \cdot D + h)$$

$$\text{soit } \tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gD} \tan \alpha + \left[1 + \frac{2v_0^2}{gD} (H - h) \right] = 0 \text{ (équation du 2d degré en } \tan \alpha \text{).}$$

5) $\Delta \geq 0$ pour avoir au moins une solution réelle soit $v_0^4 - 2gv_0^2(H - h) - g^2 D^2 \geq 0$

6) on réalise un changement de variable $X = v_0^4$, soit $X^2 - 2gX(H - h) - g^2 D^2 \geq 0$
on a donc 2 racines réelles dont une est positive, notée X_1 , et l'autre négative, notée X_2 :

$$X_{1,2} = g(H - h) \mp g(H - h) \sqrt{1 + \frac{D^2}{(H-h)^2}}$$

donc $f(X) = X^2 - 2g(H - h)X - g^2 D^2$ le coefficient devant X^2 est positif (=1) donc la parabole est tournée vers le haut. De plus comme $X=v_0^2$ il faut que $X>0$ (vous pouvez tracer la parabole $f(X)$: elle coupe l'axe des abscisses en X_1 et en X_2 , et est positive pour $X>X_1>0$ ou pour $X<X_2<0$).

$$\text{Il faut donc que } v_0^2 > X_1 \text{ soit } v_0 \geq \sqrt{g(H - h) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{D^2}{(H-h)^2}} \right]}$$

$$7) D=4,60\text{m} : v_0 \geq 7,6\text{m.s}^{-1} = 27 \text{ km.h}^{-1}$$

$$D=6,25\text{m} : v_0 \geq 8,6\text{m.s}^{-1} = 31 \text{ km.h}^{-1}$$

$$8) \tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gD} \tan \alpha + \left[1 + \frac{2v_0^2}{gD} (H - h) \right] = 0 \text{ soit } \tan \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2v_0^2}{gD} \mp \sqrt{\Delta} \right) = \frac{2v_0^2}{gD} \mp \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gD} \right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2}{gD} (H - h) \right)}$$

il y a donc 2 solutions α_1 et α_2 .

$$9) \text{ pour } v_0=10 \text{ m.s}^{-1} \text{ on obtient } \tan \alpha_1 = 0,52 \rightarrow \alpha_1 = 27,5^\circ \\ \tan \alpha_2 = 3,93 \rightarrow \alpha_2 = 75,7^\circ$$