CN5 Simuler numériquement l'action d'un filtre sur un signal périodique

Compétence attendue par le programme 2021 : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Capacités numériques travaillées avec python :

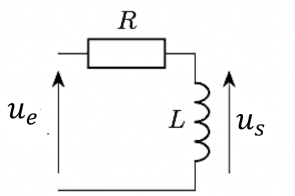
- Savoir tracer une fonction
- Savoir tracer un diagramme en bâtons
- Savoir superposer plusieurs graphes.

A. Exemple du filtre passe-haut du 1er ordre

On s'intéresse à un filtre RL de type passe-haut auquel on applique un tension d'entrée dont la décomposition en série de Fourier est la suivante (ici, c'est un cas très simple d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω avec tension de décalage):

$$u_e(t) = Ue_o + Ue_1 \cos(\omega t + \varphi e_1)$$

On choisit $U_o = 3V$, $U_1 = 2V$ et φe_1=0 rad soit $u_e(t) = 3 + 2\cos(100.t)$



Les valeurs de R et L sont choisies afin que la pulsation de coupure soit égale à : $\omega_c = R/L = 1000 \text{ rad}.s^{-1}$

Une étude en RSF, afin de pouvoir travailler en complexes, permet d'aboutir à la fonction de transfert de ce filtre, que l'on peut exprimer en fonction de ω_o :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_R}} = \frac{1}{1 + \underline{Y_L}.\underline{Z_R}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

On en déduit l'expression du gain : $G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \dfrac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

Et du déphasage : $\Delta\varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(\omega)\right) = \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$

Le signal de sortie a donc pour expression générale : $u_s(t) = Ue_o.G(\omega = 0) + Ue_1\, G(\omega).\cos\left(\omega t + \varphi e_1 + \Delta\varphi(\omega)\right)$

$G(\omega = 0)$, $G(\omega)$ et $+\Delta\varphi(\omega)$ se déduisent évidemment de la fonction de transfert…

Afin de tester l'effet du filtre, on pourra rechercher l'expression du signal de sortie pour différentes valeurs de la pulsation de coupure ω_c…

Fiche de Capacités numériques n°5

Poursuivons avec notre signal d'entrée avec une pulsation ω=100 rad.s^{-1} pour le filtre PH de pulsation de coupure ω_c= 1000 rad. s^{-1} , cela donne :

$G(0) = |\underline{H}(\omega = 0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{0}\right)^2}} \approx 0$

$G(\omega = 100) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1000}{100}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+100}} \approx 0{,}10$

et $\Delta\varphi(\omega) = \pi/2 - \arctan\left(\frac{100}{1000}\right) = \pi/2 - \arctan(0{,}1) \approx \pi/2$

$u_s(t) = 3x0 + 2x0{,}10.\cos(100t + 0 + \pi/2) = 0{,}2x\cos(100t + \pi/2) = -0{,}2.\sin(100t)$

Le signal de sortie est donc purement sinusoïdal, en quadrature avance par rapport au signal d'entrée (il a donc l'allure de l'opposé d'un sinus) et d'amplitude 0,2.
On constate que le filtre élimine la composante continue et attenue la composante variable de pulsation $\omega \ll \omega_o$ ce qui est cohérent avec un filtre passe-haut.

Il est cependant plus rapide et « visuel » d'observer l'allure des signaux temporels et des spectres fréquentiels associés pour $u_e(t)$ et $u_s(t)$, c'est ce que nous allons faire via un programme Python…

```
# importation des bibliothèques, valeur des constantes et création de ue(t)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Ue0=3
Ue1=2
phie1=0
omega=100                    # pulsation associée au signal d'entrée
omega_coupure=1000           # valeur de la pulsation de coupure  du filtre
def ue(t) :
   return Ue0+Ue1*np.cos(omega*t+phie1)
```

```
# tracé de l'évolution temporelle du signal d'entrée
tmax=0.2                 # on trace ue=f(t) entre t =0 et tmax
N=201                    # nombre de points
t=np.linspace(0,tmax,N)  # axe des abscisses
plt.plot(t,ue(t))
plt.xlabel("t en s")
plt.ylabel("ue en V")
plt.title("Signal d'entrée ue(t)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
# tracé du spectre fréquentiel associé à ue
w=[i for i in range(N)]          # axe des abscisses, avec w allant de 0 à N-1=200
U=[0 for i in range(N)]          # axe des ordonnées
U[0] = 3
U[100]=2
plt.bar(w,U, color="black")          # diagramme en bâtons
plt.xlabel("pulsation w en rad.s-1")
plt.ylabel("ue (V)")
plt.title("spectre fréquentiel du signal d'entrée")
plt.show()
```

Fiche de Capacités numériques n°5

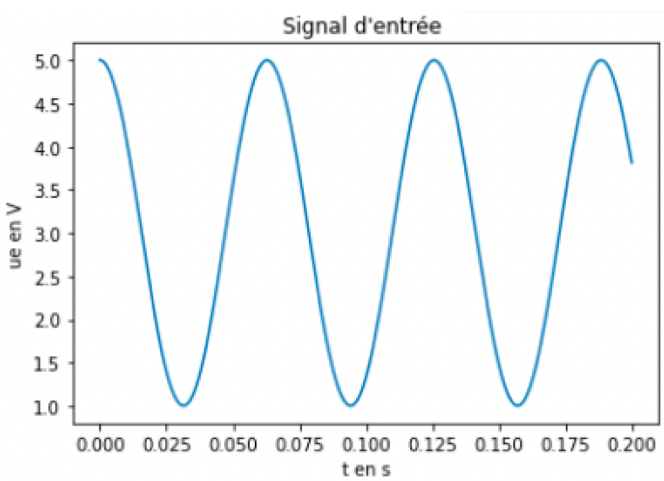
```
# fonctions Gain et déphasage associées au filtre
def gain(omega,omega_coupure):
   return (omega/omega_coupure)/np.sqrt(1+(omega/omega_coupure)**2)
def dephasage(omega,omega_coupure):
   return np.pi/2-np.arctan(omega/omega_coupure)
```

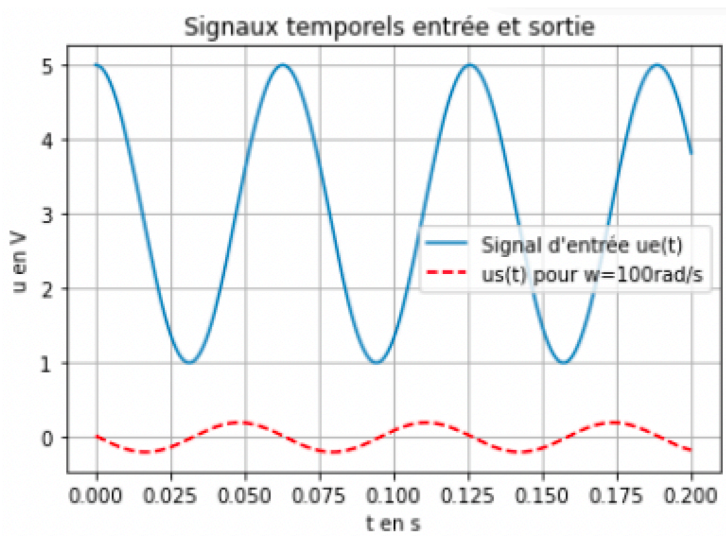
```
#Création du signal de sortie  us(t)
Us0 = Ue0*gain(0,omega_coupure)
Us1 = Ue1*gain(omega,omega_coupure)
deph1 = dephasage(omega,omega_coupure)
phis1=phie1+deph1

def us(t,omega,omega_coupure,gain):
   return Us0+ Us1*np.cos(omega*t+phis1)
```

```
# tracé de ue(t) et de us(t), on les superpose pour mieux visualiser l'action du filtre
t=np.linspace(0,tmax,N)
plt.plot(t,ue(t),label="Signal d'entrée ue(t)")
plt.plot(t,us(t,omega,omega_coupure,gain),"--",label="us(t) pour w=100rad/s")
plt.xlabel("t en s")
plt.ylabel("u en V")
plt.title("Signaux temporels entrée et sortie ")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

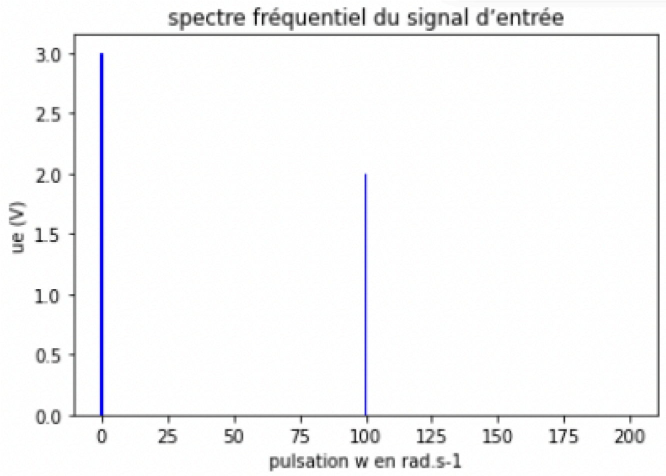
```
# tracé du spectre fréquentiel associé à us
w=[i for i in range(N)]                  # axe des abscisses, avec w allant de 0 à N-1=200
Us=[0 for i in range(N)]                 # axe des ordonnées
Us[0] = Us0
Us[100]=Us1
plt.bar(w,Us, color="black")          # diagramme en bâtons
plt.ylim(0,3)                            # on garde le même intervalle que pour le signal d'entrée
plt.xlabel("pulsation w en rad.s-1")
plt.ylabel("us (V)")
plt.title("spectre fréquentiel du signal de sortie")
plt.show()
```

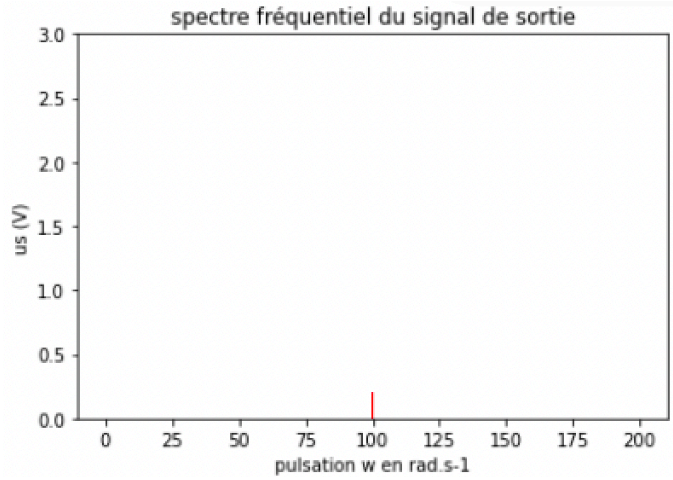
Voici les graphes obtenus pour un signal d'entrée de pulsation ω=100 rad.s^{-1} et une pulsation de coupure de ω_o=1000 rad.s^{-1} :





Voici les graphes fréquentiels obtenus pour le signal de sortie (la superposition n'est pas conseillée ici, car on a du mal à visualiser les deux, mais il faut choisir les mêmes graduations limites pour pouvoir mieux comparer) :





On retrouve bien les caractéristiques du signal de sortie déduites de la fonction de transfert (signal sinusoïdal en quadrature avance par rapport au signal d'entrée et d'amplitude 0,2V).

A vous de jouer …

1) Modifier le programme afin d'étudier l'influence du filtre passe-haut de pulsation de coupure 100 rad.s^{-1} sur le signal d'entrée précédent. Précisez les modifications faites au programme, faire des captures d'écran des représentations temporelles entrée + sortie et du spectre fréquentiel de sortie. Commenter la pertinence de ces courbes (en vous basant sur une étude analytique de la fonction de transfert pour étayer votre réponse, une réponse courte ne suffit pas).
2) Faire de même pour une pulsation de coupure de 10 rad.s^{-1}.
3) Faire de même pour une pulsation de coupure de 10000 rad.s^{-1}.

B. Cas du filtre passe-bas du 1er ordre

A vous de jouer …

Adaptez le programme précédent pour étudier l'influence d'un filtre passe-bas sur signal d'entrée précédent : vous choisirez des pulsations de coupure de 10, 100 et 1000 rad.s^{-1}. Précisez les modifications faites au programme, Faîtes des captures d'écran du programme, des représentations temporelles et des représentations fréquentielles (donnez des titres précis). Faites le lien entre l'expression analytique du gain et du déphasage et vos observations.

C. Retour sur le cas du filtre passe-haut du 1er ordre (BONUS)

A vous de jouer, c'est très instructif mais un peu plus compliqué …

Adaptez le premier programme pour étudier l'influence du filtre passe-haut du 1er ordre de pulsation de coupure égale à 100 rad.s^{-1} sur un signal d'entrée dont la décomposition en série de Fourier est la suivante :
$u_e(t) = 1 + \cos(50\text{t}) + \cos(100t) + \cos(150t)$. Faire des captures d'écran du programme **en expliquant** les différences apportées, des représentations temporelles et des spectres fréquentiels d'entrée et de sortie. Faites le lien entre l'expression analytique du gain et du déphasage et vos observations.