

I. Variabilité de la mesure d'une grandeur physique et valeur mesurée

1. Variabilité de la mesure :

En sciences, lorsqu'on effectue la mesure d'une grandeur physique de façon répétée dans les mêmes conditions de mesure, on constate une variabilité sensible des résultats obtenus.

Cette variabilité peut provenir de nombreux facteurs, dont les principaux sont les suivants :

- L'opérateur qui met en œuvre la méthode de mesure : de part ses gestes et sa façon de réaliser le protocole de mesure, l'expérimentateur introduit une variabilité importante à la valeur mesurée.
- La méthode de mesure choisie par l'opérateur et la précision des instruments de mesure utilisés.
- Les variations de paramètres liés à l'environnement (pression, température ...) dont la grandeur mesurée peut dépendre ...

2. Valeur mesurée :

La valeur mesurée est la meilleure estimation possible de la grandeur mesurée.

Pour une mesure effectuée plusieurs fois dans les mêmes conditions (même méthode de mesure et mêmes instruments), la valeur mesurée est estimée comme la moyenne arithmétique de l'ensemble des résultats.

Si on effectue la mesure une seule fois, la valeur mesurée est cette valeur unique.

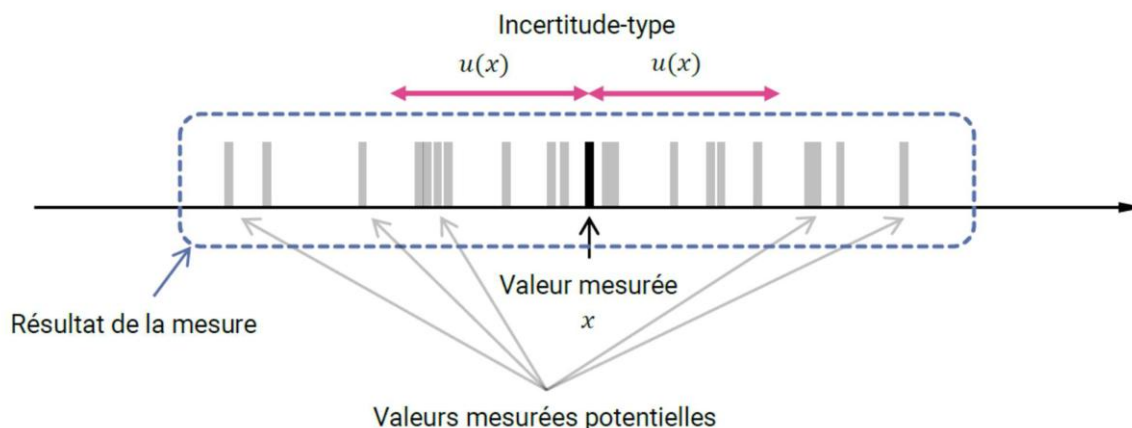
3. Incertitude-type :

La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée incertitude-type et notée $u(x)$ (pour standard uncertainty).

L'incertitude-type fournit une estimation de la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée. La valeur mesurée est une de ces valeurs.

Le résultat d'une mesure sera noté par convention $x \pm u(x)$

Selon le type de mesure, on définit une incertitude de type A ou B.



PCSI – TP CHIMIE : MESURES ET INCERTITUDES

→ L'incertitude de type A concerne les mesures que l'on peut effectuer plusieurs fois, dans les mêmes conditions, et l'évaluation de ce type d'incertitude fait appel au calcul statistique.

→ L'incertitude de type B concerne le cas d'une mesure unique, et l'évaluation de ce type d'incertitude doit prendre en compte la précision des instruments de mesure, la méthode de mesure mise en œuvre par l'opérateur.

II. Incertitude de type A : Évaluation d'une incertitude-type sur un ensemble de mesures par une approche statistique

Lorsqu'on réalise plusieurs fois la mesure d'une grandeur, les résultats sont dispersés. Pour obtenir une estimation de cette grandeur, on répète des mesures indépendantes (sans influence les unes sur les autres), ce qui suppose la même méthode, le même type de matériel de mesure.

On dispose d'un ensemble de N mesures indépendantes dont les résultats sont notés $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$

1. Moyenne d'un ensemble de mesures

La moyenne expérimentale des mesures de l'échantillon est la meilleure estimation de la valeur de la grandeur mesurée

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

2. Ecart-type expérimental d'un ensemble de mesures

La théorie statistique montre alors que la meilleure estimation de la dispersion des résultats autour de cette valeur moyenne est donnée par l'écart-type expérimental noté s_x :

$$\text{Ecart-type expérimental : } s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

La dispersion de la série est d'autant plus grande que l'écart-type expérimental est grand.

Capacité numérique : Calcul de la moyenne et de l'écart-type d'un ensemble de mesure.

Vider au goutte à goutte une pipette jaugée de 1,0 mL et mesurer le nombre n_G de gouttes.

Calculez la moyenne $\bar{n}_G$ du nombre de gouttes mesuré sur l'ensemble des mesures effectuées par la classe puis l'écart-type σ_G .

- a) A l'aide de votre calculatrice
- b) En utilisant le script Python suivant

```
# importation module numpy
import numpy as np

# Entrer les N valeurs mesurées
x=np.array([.... , ....., ....., ..... ])

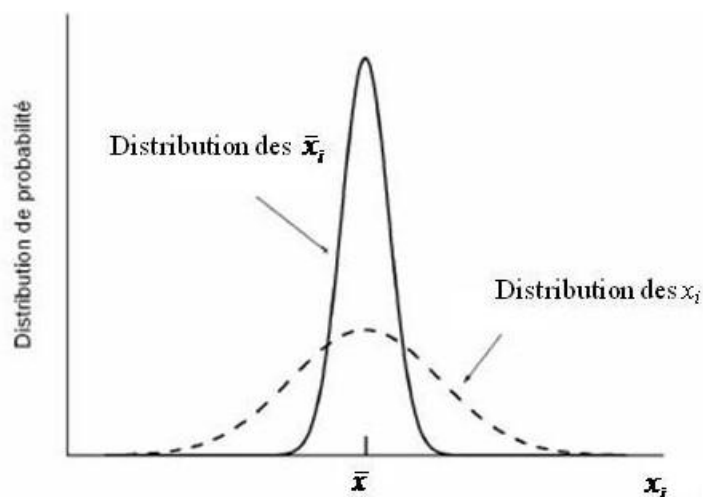
# Calcul de la moyenne
x_moy = np.mean(x)
print ( x_moy )

# Calcul de l'écart-type sur la moyenne
s_ x = np.std ( x ,ddof=1)
print (s_ x )
```

La commande ddof = 1 sert à tenir compte de la division par N-1 dans la formule de l'écart-type

3. Incertitude-type

Si on refaisait à nouveau N mesures, on obtiendrait une autre moyenne. Chaque moyenne est donc un résultat dans la population de l'infinité de moyennes possibles. La théorie des probabilités montre que la distribution de l'ensemble des moyennes est bien moins dispersée que l'ensemble des mesures uniques.



Ainsi l'estimation à partir d'une moyenne est « meilleure » que sur une seule et unique mesure.

Le meilleur estimateur de l'écart-type de la moyenne est l'incertitude-type :

$$u(x) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

N : représente le nombre de mesures utilisées pour le calcul de la moyenne

Capacité numérique : Calcul de l'incertitude-type du nombre de gouttes et donner le résultat sous la forme $x \pm u(x)$.

- a) Avec la calculatrice
- b) En ajoutant les lignes : `ux = sx/np.sqrt(N)`
`print(ux)`

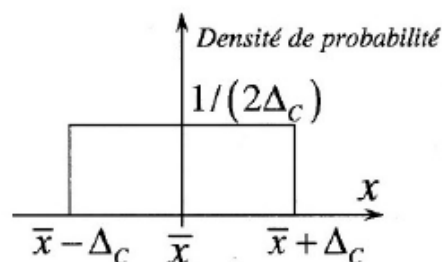
III. Incertitude de type B : Évaluation d'une incertitude-type sur une mesure unique à partir de la tolérance du constructeur

Lorsque la mesure unique est réalisée avec un instrument dont le constructeur indique la précision ou tolérance, il est possible de calculer l'incertitude-type de l'ensemble des valeurs comprises dans l'intervalle défini.

Si les valeurs sont équiréparties dans l'intervalle $\bar{x} - \Delta_c$ et $\bar{x} + \Delta_c$, l'incertitude u_x est donnée par la relation :

$$u_x = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}}$$

Où $\bar{x}$ est la valeur centrale et Δ_c la demi-étendue de l'intervalle.



Capacité numérique : Evaluation de la variabilité du volume d'une pipette jaugée
 Pipette jaugée de 1,0 mL (Indication sur la pipette $\pm 0,07$ mL)

- Evaluer l'incertitude type à l'aide de la formule puis à l'aide d'une simulation de type Monte Carlo.

IV. Evaluation des incertitudes-types composées :

On cherche souvent l'incertitude-type d'une grandeur calculée à partir de grandeurs mesurées. Le calcul de l'incertitude-type dépend de la relation entre grandeur calculée et grandeurs mesurées :

Relations mathématiques

Cas	Relation	Incrtitude
1	$X = \lambda Y$ (λ constante)	$u(X) = \lambda \cdot u(Y)$
2	$X = Y + Z$ ou $X = Y - Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
3	$X = Y/Z$ ou $X = Y \cdot Z$	$u(X) = X \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
4	$X = \lambda Y^a Z^b$	$u(X) = X \sqrt{a^2 \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

Tableau – Expressions permettant de calculer l'incertitude de grandeurs composées, dans des cas particuliers

Capacité numérique : Evaluation de la variabilité du volume d'une goutte d'eau

Estimer l'incertitude-type du volume d'une goutte d'eau :

- A partir de la formule de composition des incertitudes
- En utilisant une simulation de type Monte Carlo

V. Ecriture du résultat et comparaison à une valeur de référence

1. Ecriture du résultat :

Un résultat de mesure doit être présenté sous la forme : $x \pm u(x)$

- La valeur mesurée $x = \dots$ en précisant l'unité
- L'incertitude-type associée à la valeur mesurée sous la forme $u(x) = \dots$ en utilisant la même puissance de 10 que celle de la valeur mesurée et la même unité.

Chiffres significatifs : On limite généralement à deux le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude-type. Le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée correspond alors à la même décimale que celui de l'incertitude-type.

2. Comparaison à une valeur de référence :

On appelle **valeur de référence** une valeur mesurée par une méthode de référence scientifiquement jugée comme étant plus précise que les autres (c'est-à-dire dont l'incertitude-type sur la valeur mesurée est négligeable devant celle obtenue par les autres méthodes).

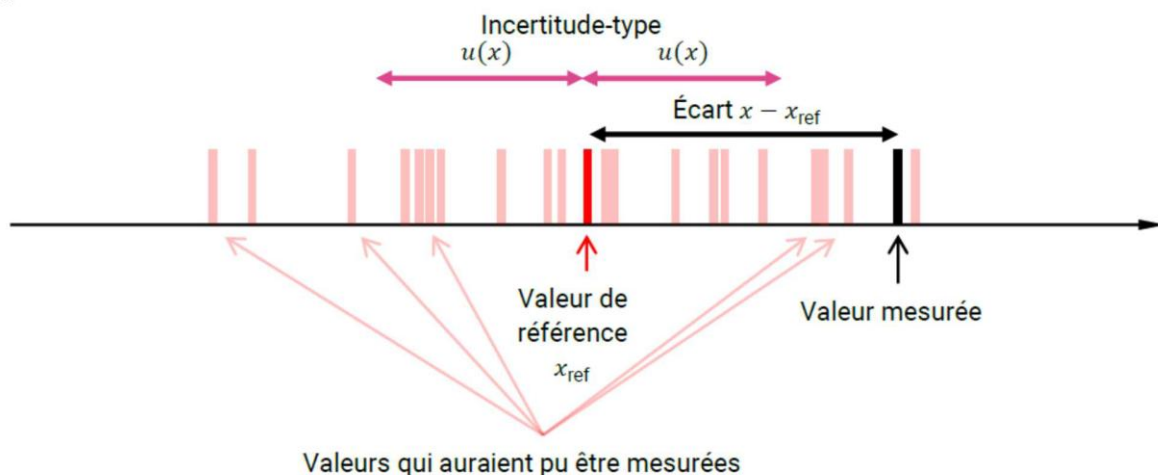
Ecart-normalisé ou z-score :

Par définition, l'incertitude type quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque la méthode de mesure envisagée et la méthode de référence sont cohérentes, on s'attend à ce que la valeur de référence ne coïncide pas exactement avec la valeur mesurée, mais ne s'en écarte pas de plus de quelques incertitude-type.

On définit l'écart-normalisé (noté E_N) ou z-score (z) comme l'écart absolu entre la valeur mesurée x et la valeur de référence x_{ref} , divisé par l'incertitude-type

$$E_N = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Il représente une évaluation de l'accord entre le résultat de mesure et la valeur de référence.



Compatibilité d'un résultat avec une valeur de référence :

- Si $E_N < 2$: résultat compatible avec la valeur de référence.
- Si $E_N \geq 2$: résultat incompatible avec la valeur de référence (cela peut être dû à une incertitude-type sous-estimée ou à une source d'incertitude oubliée ou à une expérience mal réalisée ...)

PCSI – TP CHIMIE : MESURES ET INCERTITUDES

TYPE A : Sur une série de mesures

Principe : On effectue la mesure de x plusieurs fois dans les mêmes conditions.

Soit x , la grandeur mesurée N fois :

Tableau avec les N valeurs mesurées

x					
-----	--	--	--	--	--

Moyenne : x_{moy}

Ecart-type : $s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{moy})^2}$

Incertitude-type

associée à une mesure

$$u(x) = \sigma$$

Incertitude-type

associée à la
moyenne

$$u(x_{moy}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Avantage : pas besoin d'estimer la précision du matériel ou des manipulations.

Inconvénient : même mesure répétée plusieurs fois.

SCRIPT PYTHON

```
# importation module numpy
import numpy as np

# Entrer les N valeurs mesurées
x = np.array([.... , ....., ....., ..... ])

# Calcul de la moyenne
x_moy = np.mean(x)
print ( x_moy )

# Calcul de l'écart-type et de l'incertitude type
s_x = np.std ( x ,ddof=1)
u_xmoy = s_x/np.sqrt(N)
print (u_xmoy )

ddof = 1 sert à tenir compte de la division par N-1 dans
la formule de l'écart-type
```

TYPE B : Sur une mesure unique

Principe : On estime la précision du matériel et des manipulations (méthode et précision de l'opérateur).

Souvent, on s'intéresse à une grandeur calculée à partir de grandeurs mesurées dont les incertitudes se cumulent ...

- Pour des formules simples, on utilise une formule de propagation des incertitudes
- Pour des cas moins simples, on effectue une simulation aléatoire de type MONTE-CARLO : on fait des tirages au sort des grandeurs mesurées puis on applique la formule donnant la grandeur calculée pour chacun des tirages. Ensuite :
On calcule ensuite l'incertitude-type de l'ensemble de ces valeurs calculées.

Avantage : pas besoin de répéter la mesure plusieurs fois
Inconvénient : il faut estimer les incertitudes !

SCRIPT PYTHON

```
# importation module numpy.random
import numpy.random as rd

# on définit un nombre N de tirages
N = ..... # Entrer le nombre N de tirages

L_Xcalc = [ ] # Initialiser une liste vide

for i in range(N): # Effectuer les tirages

    X_1 = rd.uniform( born inf, born sup)

    X_2 = rd.uniform( born inf, born sup)

    X_calc = ..... # entrer la formule donnant X calc
    en fonction de X_1 et X_2

    L_Xcalc.append (X_calc)

# Calcul de la moyenne et de l'incertitude-type
X_moy = np.mean (L_Xcalc)

u_Xcalc = np.std(L_Xcalc,ddof=1)

print ( X_moy, u_Xcalc ) # affichage
```