Chapitre 19 - Séries

Table des matières

§ 1. En analyse, de nombreux objets (nombres comme π ou e, fonctions usuelles...) ne sont connus et calculés que de façon approchée.
À partir du XVII-ème siècle les mathématiciens ont constaté de nombreuses formules remarquables basées sur des "sommes infinies" :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$
$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

§ 2. Par ailleurs ils ont remarqué que certaines sommes infinies ne sont pas "exploitables", par exemple :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

La théorie des séries numériques donne une définition rigoureuse de ces objets et donne des conditions suffisantes pour que les calculs habituels (opérations, fonctions, résolution d'équations, etc) soient encore possibles.
§ 3. Dans tout ce chapitre on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Présentation

Définition 1. [série numérique]
★ Une série numérique est un couple $(a_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de suites de $\mathbb{K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

★ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *terme général* de la série.
★ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite des *sommes partielles* de la série.

Notation. Une série $(a_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée symboliquement

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n$$

Remarque. Comme pour les suites, une série peut être définie pour $n \geqslant n_0$. On la note alors $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$

§ 4. Dans tout le reste du chapitre nous considérons une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, ses sommes partielles sont notées $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. La somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ est $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.
Son terme général de rang n est 1.

Exercice 1. Écrire et simplifier les sommes partielles des séries :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n$ $(\alpha \in \mathbb{C})$. On prendra garde au cas particulier $\alpha = 1$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$

réponse :
Nous notons à chaque fois S_n la somme partielle de rang n : 1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ (télescopage)
3) Si $\alpha = 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Sinon $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$
4) C'est le cas particulier $\alpha = -1$, d'où $S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 2. Calculer la somme partielle de rang 5 de la série de terme général $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n>0}$

réponse :

$$S_5 = \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

§ 5. Il est toujours possible de calculer le terme général a_n d'une série connaissant les sommes partielles :

Proposition 1.[différence de sommes partielles]
★ $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n - S_{n-1} = a_n$

démonstration :
immédiat

Exercice 3. Quel est le terme général de la série telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 3n^2 + 1$$

réponse :
$a_0 = S_0 = 1$ et pour $n > 0$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 1 - (3(n-1)^2 + 1) = 6n - 3$$

2 Convergence

§ 6. Voici la définition fondamentale de ce chapitre :

Définition 2. [convergence d'une série]
★ La série $\sum_n a_n$ est dite *convergente* lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
★ Une série non convergente est dite divergente.
★ En cas de convergence, le nombre

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

est appelé la *somme de la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

Remarque. Pour une série convergente, on a donc la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Remarque. On prendra garde à ne pas confondre :
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$: cette notation est symbolique, il n'est pas question de faire des calculs concrets avec
- La somme partielle $\sum_{k=0}^{n} a_k$: c'est une somme finie qui dépend de n
- La somme totale $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$: c'est un nombre bien défini si la série converge. Nous verrons que sous certaines conditions les calculs usuels sur les sommes finies s'étendent à ce type de somme.

Remarque. Comme pour les suites, on dit que deux séries ont *même nature* lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exercice 4. Étudier la nature des séries suivantes. Préciser leur somme en cas de convergence :
$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$, $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$

réponse :
Notons à chaque fois S_n la somme partielle de rang n,
1) $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to +\infty$: la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$ diverge.
2) $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \to +\infty$: la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ diverge.
3) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$: la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
4) $S_n = 2^{n+1} - 1 \to +\infty$: la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n$, diverge.
5) $S_n = 2 - 2^{-n} \to 2$: la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$
6) $S_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ n'a pas de limite, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ diverge.

Définition 3. [reste d'une série convergente]
■ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
♦ On suppose la série $\sum a_n$ convergente de somme S.
★ La différence
$$R_n := S - S_n$$
est appelée reste de rang n de la série $\sum a_n$.

Remarque.

— Le reste R_n pourra être noté $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

— La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 5. Calculer le reste de rang n de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}$

réponse :
$R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - (2 - 2^{-n}) = 2^{-n}$

§ 7. Il n'est pas évident de savoir à l'avance si une série converge ou diverge. La propriété suivante donne une indication :

Proposition 2. (condition nécessaire de convergence)
♦ Si la série $\sum\limits_n a_n$ converge,
★ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
★ Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente (on dit alors que la série diverge grossièrement)

démonstration :
Soit $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ Les suites (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la même limite S, donc leur différence $(S_n - S_{n-1})$ converge vers $S - S = 0$. Or nous avons vu que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$
donc la suite (a_n) converge vers 0.

Exemple 2. La suite $(\frac{n}{n+1})$ converge vers 1, donc la série $\sum \dfrac{n}{n+1}$ est divergente.

Remarque. **Attention, la réciproque est fausse**, comme le montre l'exemple suivant :

Proposition 3.
★ La série dite harmonique
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$
est divergente.

démonstration :
En posant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ on observe que
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
Supposons alors la série harmonique convergente de somme S. Les suites (S_n) et (S_{2n}) convergent alors vers S, donc $S_{2n} - S_n \to 0$, donc $0 \geqslant \frac{1}{2}$: contradiction.

§ 8. Quelques propriétés des sommes finies s'étendent aux sommes de séries convergente :

Proposition 4. (linéarité de la somme)

■ Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ des séries *convergentes.*

★ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha a_n + \beta b_n)$ est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a en effet :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) &= \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k + \beta \sum_{k=0}^{n} b_k \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\end{aligned}$$

Exemple 3. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum \frac{21}{n}$ diverge.

La série $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}$ converge, de somme 1, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^{n+2}}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+2}} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{3}{4}$$

Remarque. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. La somme de deux séries divergentes peut converger ou diverger !

Exemple 4. Les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ sont divergentes, mais la série $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{5u_{n+1} - u_n}{6}$$

1. Expliciter u_n en fonction de n
2. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et calculer sa somme.

réponse :

1) (u_n) est une suite récurrente linéaire double, de polynôme caractéristique $X^2 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6} = (X - \frac{1}{2})(X - \frac{1}{3})$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n}$. EN utilisant les valeurs de u_0 et u_1 on obtient $\alpha = 4$ et $\beta = -3$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n}$$

2) Les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$ convergent (voir séries de référence un peu plus loin, ou reprendre un exercice précédent), donc $\sum u_n$ converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{4}{2^n} - \frac{3}{3^n}) \\ &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} \\ &= 4.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 3\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Proposition 5. (décalage d'indice)
★ Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{n+1}$ ont même nature.
★ En cas de convergence,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right) - a_0$$

démonstration :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, considérons les sommes partielles $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k$ et $T_N = \sum\limits_{k=1}^{N} a_{k-1}$. Elles sont liées par :

$$T_N = \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k = S_{N-1}$$

donc la suite (T_N) converge si et seulement si la suite (S_N) converge, et le cas échéant ces suites ont la même limite.
La démonstration est semblable pour $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{n+1}$.

Proposition 6. (troncature)
■ Soit $N \in \mathbb{N}$.
★ Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N} a_n$ ont même nature.
★ En cas de convergence,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{+\infty} a_k$$

démonstration :
Pour tout $n \geqslant N$ notons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=N}^{n} a_k$$

On a donc

$$\forall n \geqslant N \quad S_n = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k\right) + T_n$$

donc la suite (S_n) converge si et seulement si la suite (T_n) converge. En cas de convergence on a

$$\lim(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k\right) + \lim(T_n)$$

Exercice 7. Existence et calcul de

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

réponse :
Notons $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+3}$ converge. Ainsi A existe et

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

§ 9. La propriété suivante permet de déterminer la nature d'une suite en utilisant une série :

Proposition 7. (télescopage)
★ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_{n+1} - a_n)$ sont de même nature.
★ En cas de convergence,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1} - a_k) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) - a_0$$

démonstration :
En effet la somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

converge si et seulement si la suite (a_{n+1}) converge.

Proposition 8.[partition]
♦ Si les séries $\sum a_{2n}$ et $\sum a_{2n+1}$ convergent,
★ alors la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$$

démonstration :
Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{k=0}^{2N} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_{2k} + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \end{aligned}$$

et de même on montre que $S_{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$. Les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers la même limite, donc (S_N) converge.

Exemple 5. En admettant provisoirement la convergence des séries $\sum \frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit la formule remarquable :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

§ 10. Nous allons voir qu'il est très souvent possible, sans calculer les sommes partielles, de connaître la nature d'une série. L'idée est de comparer le terme général a_n avec le terme général d'une série dont la nature est connue.

3 Séries de référence

§ 11. Nous allons étudier deux exemples fondamentaux de séries : les séries géométriques et les séries de Riemann.

Théorème 9. [séries géométriques]
■ Soit $a \in \mathbb{C}$.
★ La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.
★ Le cas échéant,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

démonstration
Calculons la somme partielle

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } a = 1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \text{ sinon} \end{cases}$$

La suite (S_n) converge si et seulement si $a \neq 1$ et si la suite (a^n) est convergente. Autrement dit (S_n) converge si et seulement si $|a| < 1$, auquel cas

$$\lim(S_n) = \frac{1}{1-a}$$

Exemple 6. Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-qn}$ est une série géométrique de raison e^{-q}. Elle converge si et seulement si $e^{-q} < 1$, c'est-à-dire $q > 0$.

Exercice 8. Soit $a \in]-1, 1[$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=p}^{+\infty} a^k$

réponse :
$|a| < 1$ donc la série $\sum_{k\geq 0} a^k$ converge. De plus avec un décalage d'indice :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} a^k = \sum_{j=0}^{+\infty} a^{p+j} = a^p \sum_{j=0}^{+\infty} a^j = \frac{a^p}{1-a}$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n$ et calculer sa somme en cas de convergence.
réponse :
Notons $z = \frac{1-a}{1+a}$. la série proposée converge si et seulement si $|z| < 1$, ie $|a-1| < |a+1|$, ie $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(a) > 0$. Le cas échéant,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n &= \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-\frac{a-1}{a+1}} \\ &= \frac{a+1}{2}\end{aligned}$$

§ 12. Une série de Riemann (à ne pas confondre avec les sommes de Riemann du calcul intégral) est une série de la forme $\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Il n'y a pas de formule pour calculer les sommes partielles de cette série. Nous allons cependant trouver un bon encadrement de S_n en utilisant des intégrales :

Lemme 10. (comparaison série intégrale)
■ Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
★ On a l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)dt$$

démonstration :
-Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est décroissante sur $[k, k+1]$, donc

$$\forall t \in [k, k+1] \quad f(t) \leqslant f(k)$$

Comme $f$est continue sur $[1, +\infty[$, on peut intégrer cet encadrement entre k et $k+1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k)$$

- Ajoutons maintenant ces inégalités pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

donc (relation de Chasles) $\quad \int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n$

-Pour obtenir l'autre inégalité, nous procédons de même en partant de

$$\forall t \in [k, k+1] \quad f(t) \geqslant f(k+1)$$

donc après intégration entre k et $k+1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \geqslant f(k+1)$$

et enfin en sommant pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\int_1^n f(t)dt \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = S_n - f(1)$$

Remarque. La démonstration de ce lemme est à savoir refaire dans un cas particulier. Il est possible d'obtenir un énoncé analogue pour une fonction f croissante, et même pour toute fonction monotone sur un intervalle $[n_0, +\infty[$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

Théorème 11.[nature des séries de Riemann]
■ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
★ La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

démonstration :
Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et distinguons plusieurs cas :
- Si $\alpha \leqslant 0$: la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0, donc la série de Riemann diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 1$: nous retrouvons la série harmonique, qui est divergente.
- Si $0 < \alpha < 1$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. La fonction f est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. D'après le lemme :

$$\begin{aligned} &\int_1^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \\ \text{donc} \quad &\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n \\ \text{donc} \quad &\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leqslant S_n \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = +\infty$, donc $\lim S_n = +\infty$: la série diverge.
-Si $\alpha > 1$: la suite (S_n) est croissante. Montrons qu'elle est majorée (ce qui entrainera sa convergence). Nous utilisons encore le lemme :

$$\begin{aligned} &S_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)dt \\ \text{donc} \quad &S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \\ \text{donc} \quad &S_n \leqslant 1 + \frac{1-(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

La suite (S_n) est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$

Exemple 7. Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergent.
Les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Remarque. Pour $\alpha > 1$ la somme de la série de Riemann est notée $\zeta(\alpha)$ (fonction zeta de Riemann) :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Il n'y a pas de formule explicite de $\zeta(\alpha)$ pour α quelconque. La démonstration précédente fournit tout de même l'encadrement :

$$\forall \alpha > 1 \quad \frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Quelques valeurs particulières sont connues. On montre par exemple

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 10. En utilisant une comparaison somme-intégrale, étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

réponse :
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
-La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} f(k) \\ &\geqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \\ &= \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.
-La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} g(k) \\ &\leqslant g(2) + \int_2^{n} \frac{dt}{t(\ln(t))^2} \\ &= \frac{1}{2(\ln(2))^2} + \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \\ &\leqslant \frac{1}{2(\ln(2))^2} + \frac{1}{\ln(2)} \end{aligned}$$

La suite (S_n) est donc majorée. Par ailleurs c'est une suite croissante, donc elle converge : la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

4 Séries à termes positifs

§ 13. Nous allons donner des conditions suffisantes de convergence d'une série lorsque le terme général a_n est positif.

Théorème 12.
♦ On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.
★ La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée.
★ Le cas échéant,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n)$$

démonstration :
Comme (a_n) est positive, la suite (S_n) est croissante. On applique alors le théorème de limite monotone.
Remarque. Pour une série à termes positifs divergente on a $\lim S_n = +\infty$

Théorème 13. (règles de comparaisons des séries à termes positifs)
■ Soient (a_n) et (b_n) des suites de réels positifs.
♦ On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant b_n$
2. $a_n = \mathcal{O}(b_n)$
3. $a_n = o(b_n)$.

★ Si la série $\sum\limits_n b_n$ converge, alors la série $\sum\limits_n a_n$ converge
★ Si la série $\sum\limits_n a_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_n b_n$ diverge

démonstration :
1) Supposons $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant b_n$. Notons (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles respectives de $\sum a_n$ et $\sum b_n$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} b_k = T_n$$

-> Si $\sum b_n$ converge : alors (T_n) est majorée, donc (S_n) aussi. Donc $\sum a_n$ converge.
-> Si $\sum a_n$ diverge : alors $S_n \to +\infty$, donc $T_n \to +\infty$. Donc $\sum b_n$ diverge.
2) Supposons $a_n = \mathcal{O}(b_n)$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant M.b_n$. Or les séries $\sum b_n$ et $\sum M.b_n$ ont même nature. On est ramené au premier point.
3) Supposons $a_n = o(b_n)$. On peut alors affirmer que $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, et utiliser le point précédent.

Exemple 8. Considérons la série $\sum\limits_n n^5 e^{-3n}$. Son terme général $a_n = n^5 e^{-3n}$ est positif. Nous allons montrer que la série $\sum a_n$ converge en comparant a_n avec $\frac{1}{n^2}$. Remarquons :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to+\infty} n^7 e^{-3n} = 0 \quad \text{(croissance comparée)}$$

donc $a_n = o(\frac{1}{n^2})$. Or la série de Riemann $\sum\limits_{n>0} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. Donc la série $\sum a_n$ converge.

Exemple 9. Étudions la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$. Nous avons

$$\forall n \geqslant 3 \quad \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Exercice 11. En utilisant le théorème de comparaison, étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_n \frac{1}{2^{n^2}}$
2. $\sum_n \frac{1}{n^n}$
3. $\sum_n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_n \frac{(\ln(n+1))^2}{n^2(n+1)(n+3)}$
5. $\sum_n \frac{e^{-n}}{\sqrt{n^3+1}}$

réponse :

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{1}{2^{n^2}} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Or la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum_n \frac{1}{2^{n^2}}$ converge.

2)$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_n \frac{1}{n^n}$ converge.

3) Quand $n \to +\infty, \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, donc $\sum_n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

4) $\frac{(\ln(n+1))^2}{n^2(n+1)(n+3)} \sim \frac{(\ln(n))^2}{n^4} = o(\frac{1}{n^3})$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum_n \frac{(\ln(n+1))^2}{n^2(n+1)(n+3)}$ converge.

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{e^{-n}}{\sqrt{n^3+1}} \leqslant e^{-n}$. Or la série géométrique $\sum e^{-n}$ converge, donc $\sum_n \frac{e^{-n}}{\sqrt{n^3+1}}$ converge.

Théorème 14.[séries à termes positifs et équivalents]
■ Soient (a_n) et (b_n) des suites de réels positifs.
♦ Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$
★ Alors les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ ont même nature.

démonstration :
L'hypothèse implique :

$$\exists N \ \forall n \geqslant N \quad 0 \leqslant \frac{b_n}{2} \leqslant a_n \leqslant 2b_n$$

On applique alors la proposition précédente.

Remarque. Cette propriété reste vraie pour une série dont le terme général a_n est de signe constant à partir d'un certain rang.

Attention : La règle des équivalents ne marche pas lorsque le terme général a_n n'est pas de signe constant (voir exemple dans la partie suivante).

Exemple 10. Étudions la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+5}}$. Son terme général est positif et

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n+5}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, est convergente. Donc la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+5}}$ converge.

Exemple 11. Étudions la série $\sum_n \left(\ln(n+\sqrt{2}) - \ln(n)\right)$. Nous avons

$$\ln(n+\sqrt{2}) - \ln(n) = \ln(1+\frac{\sqrt{2}}{n}) \sim \frac{\sqrt{2}}{n}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_n \Big(\ln(n+\sqrt{2}) - \ln(n)\Big)$ diverge.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha \ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$

réponse :
Le terme général de la série proposée est positif. De plus quand n tend vers $+\infty$,

$$n^\alpha \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim n^\alpha . \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}-\alpha$, d'où :
-Si $\frac{1}{2}-\alpha > 1$, ie si $\alpha < -\frac{1}{2}$: la série proposée converge.
-Sinon ($\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$) : la série diverge.

Exercice 13. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge.
2. En déduire que la suite (u_n) converge. (*sa limite est appelée constante d'Euler*)

réponse :
1) Nous allons déterminer un équivalent de $u_{n+1}-u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) \\
&= \frac{1}{n} . \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}.(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge
2) Nous avons vu que la suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ ont la même nature, donc (u_n) converge.

Exercice 14. Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On pourra utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

réponse :
Posons $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On a $a_{2n} = -\frac{1}{4n^2}$ donc $\sum a_{2n}$ converge. De plus $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ donc $\sum a_{2n+1}$ converge. Par conséquent la série $\sum a_n$ converge et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

§ 14. Voyons maintenant comment étudier des séries dont le terme général est de signe variable (voire non réel)

5 Convergence absolue

§ 15. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes.

Définition 4.[convergence absolue]
★ On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ est convergente.

Exemple 12.

— Les série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ sont absolument convergentes. En effet dans les deux cas, la valeur absolue du terme général est majorée par $\frac{1}{n^2}$, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

— La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente.

§ 16. L'intérêt de la convergence absolue apparaît dans le résultat suivant :

Théorème 15.
★ Toute série absolument convergente est convergente.
★ Si $\sum a_n$ converge absolument alors on a l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

démonstration :
Soit $\sum a_n$ une série de $\mathbb{K}$ absolument convergente.
- On suppose d'abord $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note

$$a_n^+ := \max(0, a_n) \quad \text{et} \quad a_n^- := \max(0, -a_n)$$

Observons que

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n| \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n| \end{aligned}$$

La série $\sum |a_n|$ converge. D'après la propriété de comparaison des séries à termes positifs , les séries

$$\sum a_n^+ \quad \text{et} \quad \sum a_n^-$$

sont donc convergentes. Par conséquent la série $\sum(a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$ est convergente.
- Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ notons $x_n = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(a_n)$ (resp. $y_n = \mathcal{I}\mathrm{m}\,(a_n)$). Nous avons

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N} \quad 0 \leqslant |x_n| \leqslant |a_n| \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad 0 \leqslant |y_n| \leqslant |a_n| \end{aligned}$$

donc les séries réelles $\sum |x_n|$ et $\sum |y_n|$ convergent. D'après l'étude du cas réel, les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont donc convergentes. Donc $\sum a_n = \sum(x_n + iy_n)$ est convergente.
- Pour l'inégalité triangulaire, il suffit d'observer que

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

puis de faire tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité.
Remarque. La réciproque est fausse : voici un exemple de série convergente mais pas absolument convergente :

Proposition 16.
★ La série dite harmonique alternée

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente (de somme $-\ln(2)$) mais pas absolument convergente.

démonstration :
La série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ est divergente (série harmonique). Montrons néanmoins que la série proposée converge. Posons $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$. Calculons S_{2n} en séparant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair :

$$\begin{aligned}
S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}&=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\\
&=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}-\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\right)\\
&=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\\
&=-\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

On reconnait une somme de Riemann de la fonction $f:t\mapsto\frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. D'où

$$\lim S_{2n}=-\int_0^1\frac{dt}{1+t}=-\ln(2)$$

De plus $S_{2n+1}=S_{2n}-\frac{1}{2n+1}$ converge aussi vers $-\ln(2)$. Finalement la suite (S_n) converge vers $-\ln(2)$.

Théorème 17. [règles de comparaisons étendues]
■ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{K}}$ une suite de réels positifs
♦ On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n$ converge et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n|\leqslant b_n$
2. $|a_n|=\mathcal{O}(b_n)$
3. ou $|a_n|=o(b_n)$

★ Dans ces conditions la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ converge (absolument).

démonstration :
On utilise la propriété de comparaison avec les suites positives $(|a_n|)$ et (b_n).

Remarque. Attention, il n'y a pas de règle sur les équivalents : on peut avoir $a_n \sim b_n$ avec des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ de nature différente :
par exemple avec

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$$

- on a bien $a_n \sim b_n$
- On a vu que la série $\sum a_n$ converge
- Supposons la série $\sum b_n$ convergente : alors la série $\sum(b_n - a_n)$ est convergente, ie $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ converge : absurde (voir un des exercices précédents). Donc $\sum b_n$ diverge.

Exercice 15. Étudier la convergence des séries :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n+(-1)^n n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$

réponse :
1) Notons $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n n^2}$, nous avons $|a_n| = \frac{1}{|n+(-1)^n n^2|} \sim \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum |a_n|$ converge, donc $\sum a_n$ converge.
2) Notons $b_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$. Nous avons $b_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$: nous ne pouvons pas en déduire que $\sum b_n$ converge ! Cependant $|b_n| \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum |b_n|$ diverge.
Pour en savoir plus sur $\sum b_n$, utilisons un développement limité :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= c_n + d_n \end{aligned}$$

où $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $d_n = b_n - c_n = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Nous observons que
-> la série $\sum c_n$ est convergente ;
-> $d_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum d_n$ converge.
-> Finalement (linéarité) la série $\sum b_n$ est convergente.

6 Règle de d'Alembert

§ 17. La nature de certaines séries peut s'obtenir par comparaison avec les séries géométriques :

Théorème 18.(règle de d'Alembert)
■ Soit (a_n) une suite d'éléments non nuls de $\mathbb{K}$, et soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
♦ On suppose

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

★ Si $\ell < 1$ alors la série $\displaystyle\sum_n a_n$ converge (absolument).
★ Si $\ell > 1$ alors la série $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge.

démonstration :
- Supposons $\ell < 1$ et soit $q \in]\ell, 1[$. Par hypothèse on a

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q$$

On en déduit par une récurrence facile :

$$\forall n \geqslant N \quad |a_n| \leqslant |a_N|.q^{n-N}$$

donc $|a_n| = \mathcal{O}(q^n)$. Or la série géométrique $\sum q^n$ converge (puisque $|q| < 1$) donc la série $\sum a_n$ est (absolument) convergente.
-Supposons $\ell > 1$ et soit $q \in]1, \ell[$. En raisonnant comme ci-dessus on peut écrire :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad |a_n| \geqslant |a_N|.q^{n-N}$$

On en déduit $\lim |a_n| = +\infty$. La suite (a_n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement)
Remarque. Lorsque $\ell < 1$ on peut donc affirmer que $\lim a_n = 0$ (terme général d'une série convergente)
Remarque. Lorsque $\ell = 1$ toutes les situations sont possibles. Par exemple pour la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$:

$$\ell = \lim \left(\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \right) = 1$$

Mais la série peut converger ($\alpha > 1$) ou diverger ($\alpha \leqslant 1$).
Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{C}$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$. (*on démontre que la somme de cette série est* e^a).
réponse :
C'est évident si $a = 0$. Supposons $a \neq 0$ et posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{a}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

7 Développement décimal d'un réel

§ 18. Rappelons qu'un *nombre décimal* est un nombre qui peut s'écrire comme quotient d'un entier par une puissance entière de 10. Ainsi :
-> $0,23901 = \dfrac{23901}{10^5}$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ sont décimaux,
-> $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ et π ne le sont pas.
§ 19. Rappelons qu'un nombre entier naturel non nul a s'écrit de manière unique sous la forme :

$$a = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k.10^k$$

où $N \in \mathbb{N}$, $(\alpha_0, \cdots, \alpha_N) \in [\![0, 9]\!]^{N+1}$ et $\alpha_N \neq 0$.
Soit $x \in [0, 1[$ un nombre décimal, disons de la forme $x = \frac{a}{10^p}$ avec $p > N$, on obtient

$$x = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k.10^{k-p}$$

formule qui sera appelée un développement décimal de x. Nous allons généraliser cela à des nombres réels pas forcément décimaux.

Proposition 19.

■ Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9.

★ La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k 10^{-k}$ converge vers un réel x compris entre 0 et 1.

★ Étant fixé $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ une somme partielle de cette série,

$$S_n \leqslant x \leqslant S_n + 10^{-n}$$

★ Si de plus la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire à 9, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $S_n \leqslant x < S_n + 10^{-n}$
2. $S_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_k = \lfloor 10^k x\rfloor - 10.\lfloor 10^{k-1} x\rfloor$

démonstration :
1) On a $\forall k \quad 0 \leqslant a_k 10^{-k} \leqslant 9.10^{-k}$. Or la série géométrique $\sum 10^{-k}$ converge, donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k 10^{-k}$ converge. De plus

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 9.10^{-k} = 9.\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = 1$$

En notant $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$, on a $x - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 10^{-k} \geqslant 0$ et

$$x - S_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9.10^{-k} = 9.\frac{10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} = 10^{-n}$$

2) Supposons maintenant la suite (a_k) non stationnaire à 9. Il existe donc $p > n$ tel que $a_p \leqslant 8$. Donc

$$S_n + 10^{-n} - x = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (9 - a_k).10^{-k} \geqslant 10^{-p} > 0$$

donc on a bien $S_n \leqslant x < S_n + 10^{-n}$. On a donc $10^n S_n \leqslant 10^n x < 10^n S_n + 1$. Or $10^n S_n$ est un entier, donc $10^n S_n = \lfloor 10^n x\rfloor$. Enfin la dernière formule résulte de

$$S_1 = a_1.10^{-1} \text{ et } \forall k > 1 \quad S_k - S_{k-1} = a_k 10^{-k}$$

Définition 5.[développement décimal d'un nombre réel]

■ Soit $x \in [0, 1[$ un nombre réel.

★ Un *développement décimal* de x est une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers compris entre 0 et 9 et tels que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$$

★ Un tel développement est dit *impropre* lorsque

$$\exists N \; \forall k \geqslant N \quad a_k = 9$$

Dans le cas contraire on parle de développement décimal propre.

Théorème 20.
★ Tout nombre décimal compris strictement entre 0 et 1 possède exactement deux développements décimaux, dont l'un est propre (et stationnaire à 0) et l'autre impropre.
★ Tout réel compris entre 0 et 1 non décimal possède un unique développement décimal, et celui-ci est propre.

démonstration :
-Nous avons vu qu'un nombre décimal a un développement décimal fini (et donc propre)
-Considérons un développement impropre (a_k) et soit p le plus grand entier tel que $a_p < 9$. On observe que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} &= \sum_{k=1}^{p} a_k 10^{-k} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} 9.10^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_k 10^{-k} + 10^{-p} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} a_k 10^{-k} + (a_p+1).10^{-p}\end{aligned}$$

la somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est donc un nombre décimal ayant le développement propre

$$(a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p + 1, 0, 0, \cdots)$$

-Considérons maintenant un réel $x \in [0,1[$, montrons l'existence et l'unicité d'un développement propre de x.
-> Unicité : d'après la proposition précédente, le seul développement propre possible de x est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_k = \lfloor 10^k x \rfloor - 10.\lfloor 10^{k-1} x \rfloor$$

-> Existence : Soit (a_k) la suite définie ci-dessus. Ce sont bien des entiers compris entre 0 et 9. Vérifions que $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} &= \sum_{k=1}^{n} (\lfloor 10^k x \rfloor - 10.\lfloor 10^{k-1} x \rfloor) 10^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lfloor 10^k x \rfloor 10^{-k} - \lfloor 10^{k-1} x \rfloor 10^{-(k-1)}) \\ &= \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ (télescopage)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\end{aligned}$$

Notation. Si (a_k) est un développement décimal de $x \in [0,1[$ nous noterons

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

Les développements impropres fournissent ce type d'égalité :

$$0,2721399999 \cdots = 0,27214$$

En cas de développement propre, les entiers a_k sont appelés chiffres décimaux de x.

Remarque. On peut généraliser cet énoncé pour écrire des nombres réels en base b, où $b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 2$. Les entiers a_k sont alors compris entre 0 et $b-1$.
Remarque. On peut montrer qu'un nombre réel $x \in [0,1[$ est rationnel si et seulement si la suite (a_k) de ses chiffres décimaux est périodique à partir d'un certain rang. Ainsi le réel

$$x = 0,101001000100001\cdots$$

est irrationnel