Chapitre 18 - Déterminant

Table des matières

§ 1. Le déterminant est un outil numérique naturellement associé aux matrices et aux familles de vecteurs.

- La notion de déterminant apparait naturellement dans les calculs d'aires de parallélogrammes et de volumes de parallélépipèdes
- On donne ensuite une définition plus générale pour les matrices carrées d'ordre n
- On passe ensuite en revue diverses méthodes de calcul de ces déterminants

§ 2. Dans tout ce chapitre, on note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. n un entier naturel non nul, et E est un K-espace vectoriel de dimension n.

1 Aires et volumes définis par une famille de vecteurs

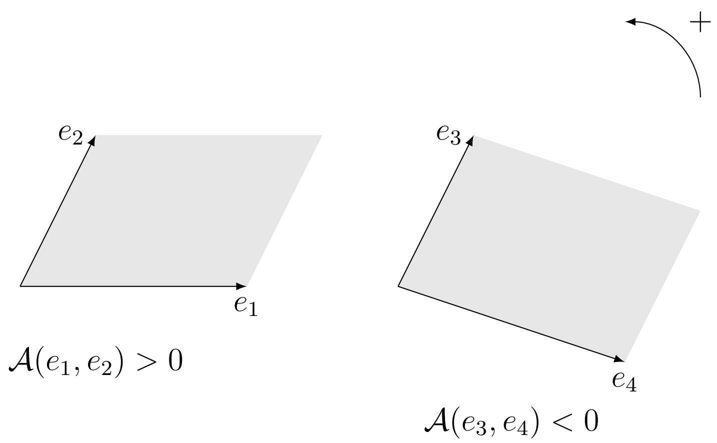
§ 3. Nous supposons que E est un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ ($\dim(E) = 2$) dans lequel les notions usuelles d'orthogonalité, de longueur, d'aire et d'angle orienté ont du sens.
Une famille de deux vecteurs non nuls (e_1, e_2) est dite directe lorsque l'angle $\widehat{(e_1, e_2)}$ a une mesure comprise entre 0 et π modulo 2π. Dans la cas contraire la famille est dite indirecte.
Étant donnés deux vecteurs e_1, e_2 de E nous notons

$$\mathcal{P}(e_1, e_2) = \left\{ \alpha e_1 + \beta e_2 \quad / \quad (\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \right\}$$

le *parallélogramme* formé par les vecteurs e_1 et e_2.
L'*aire algébrique* de ce parallélogramme, notée $\mathcal{A}(e_1, e_2)$ dans ce cours, est définie comme

- l'aire (géométrique) de $\mathcal{P}(e_1, e_2)$ si (e_1, e_2) est directe ;
- l'opposée de cette aire sinon.

§ 4. Illustration :



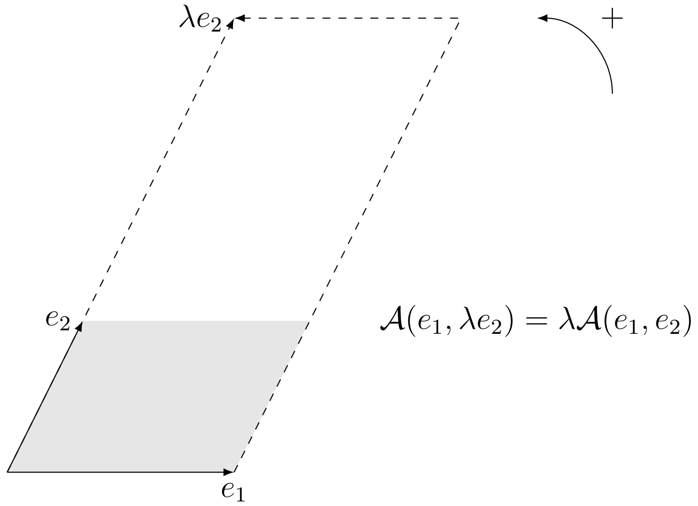
Exemple 1.

- Si e_1 ou e_2 est nul, ou si e_1 et e_2 sont liés, alors $\mathcal{A}(e_1, e_2) = 0$
- Si (e_1, e_2) est une base orthonormale (vecteurs orthogonaux de norme 1), alors $\mathcal{P}(e_1, e_2)$ est un carré de côté 1 donc $\mathcal{A}(e_1, e_2) = \pm 1$
- L'aire géométrique du parallélogramme $\mathcal{P}(e_1, e_2)$ est $|\mathcal{A}(e_1, e_2)|$

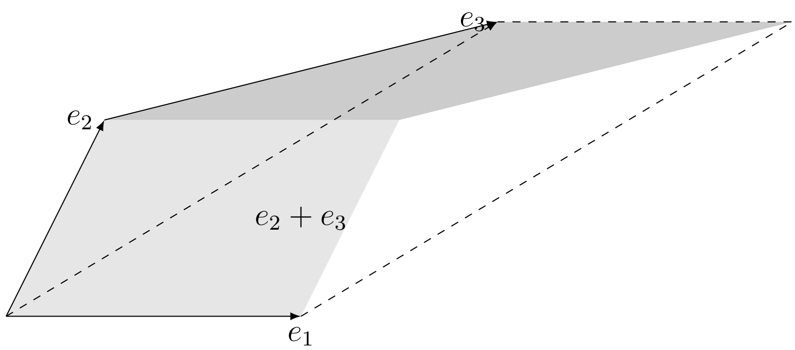
§ 5. La fonction $\mathcal{A} : E^2 \to \mathbb{R}$ a les propriétés remarquables suivantes, qui sont à la base de la théorie du déterminant :

Théorème 1.
■ Soient $(e_1, e_2) \in E^2$
★ $\mathcal{A}(e_2, e_1) = -\mathcal{A}(e_1, e_2)$: on dit que $\mathcal{A}$ est une fonction *alternée*
★ Les applications $x \mapsto \mathcal{A}(x, e_2)$ et $x \mapsto \mathcal{A}(e_1, x)$ sont linéaires : on dit que $\mathcal{A}$ est une fonction *multilinéaire*

§ 6. Illustration : linéarité de $x \mapsto \mathcal{A}(e_1, x)$



§ 7. Illustration : linéarité de $x \mapsto \mathcal{A}(e_1, x)$



$$\mathcal{A}(e_1, e_2 + e_3) = \mathcal{A}(e_1, e_2) + \mathcal{A}(e_1, e_3)$$

§ 8. Nous allons en déduire le calcul de $\mathcal{A}(e_1, e_2)$ en fonction des coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans une base :

Théorème 2.

■ Soit $\mathcal{B} = (i, j)$ une base de E.

■ Soit (e_1, e_2) une famille de deux vecteurs, de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$

★ L'aire orientée du parallélogramme $\mathcal{P}(e_1, e_2)$ est

$$\mathcal{A}(e_1, e_2) = \delta.\mathcal{A}(i, j)$$

avec

$$\delta = ad - bc$$

démonstration :

Par hypothèse, $e_1 = ai + cj$ et $e_2 = bi + dj$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_1, e_2) &= \mathcal{A}(ai + cj, bi + dj) \\
&= ab\mathcal{A}(i, i) + ad\mathcal{A}(i, j) + cb\mathcal{A}(j, i) + cd\mathcal{A}(j, j) \text{ (multilinéarité de } \mathcal{A}) \\
&= ab.0 + ad\mathcal{A}(i, j) - bc\mathcal{A}(i, j) + cd.0 \text{ (} \mathcal{A} \text{ est alternée)} \\
&= (ad - bc)\mathcal{A}(i, j)
\end{aligned}$$

Remarque. Le nombre $\delta = ad - bc$ sera appelé déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ou aussi déterminant de la famille (e_1, e_2) dans la base $\mathcal{B} = (i, j)$
Lorsque la base (i, j) est orthonormale directe, la formule se simplifie en :

$$\mathcal{A}(e_1, e_2) = ad - bc$$

§ 9. Voici une propriété analogue des endomorphismes de E :

Théorème 3.
■ Soit f un endomorphisme de E, et δ le déterminant de $M_{\mathcal{B}}(f)$.
■ Soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme de E d'aire algébrique α
★ $f(\mathcal{P})$ est un parallélogramme d'aire algébrique $\delta.\alpha$

démonstration rapide :
Notons $\mathcal{P} = \mathcal{P}(e_1, e_2)$, nous avons

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}) &= \left\{ \ f(\alpha e_1 + \beta e_2 \quad / \quad (\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \ \right\} \\ &= \left\{ \ \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) \quad / \quad (\alpha, \beta) \in [0,1]^2 \ \right\} \text{ (linéarité de } f) \\ &= \mathcal{P}(f(e_1), f(e_2)) \end{aligned}$$

donc $f(\mathcal{P})$ est un parallélogramme, d'aire $\mathcal{A}(f(e_1), f(e_2))$.
-Si la famille (e_1, e_2) est liée, alors $(f(e_1), f(e_2))$ aussi donc $\mathcal{A}(f(e_1), f(e_2)) = 0 = \delta\mathcal{A}(e_1, e_2)$.
-Sinon (e_1, e_2) est une base donc

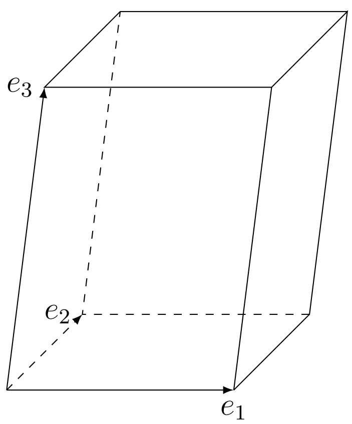
$$\mathcal{A}(f(e_1), f(e_2)) = \delta'\mathcal{A}(e_1, e_2)$$

où δ' est le déterminant de $M_{(e_1,e_2)}(f)$. On démontre alors (voir fin de ce chapitre) que ce déterminant est en fait indépendant de la base choisie, donc est égal à δ.
Remarque. On résume cette propriété en disant que les aires algébriques sont multipliées par δ sous l'action de f.
§ 10. Supposons maintenant E de dimension 3.
Étant donnés trois vecteurs e_1, e_2, e_3 de E nous notons

$$\mathcal{P}(e_1, e_2, e_3) = \left\{ \ \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \quad / \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in [0,1]^3 \ \right\}$$

le *parallélépipède* formé par les vecteurs e_1, e_2, e_3.
Le *volume algébrique* de cet ensemble, notée $\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3)$ dans ce cours, est définie comme
— le volume de $\mathcal{P}(e_1, e_2, e_3)$ si (e_1, e_2, e_3) est directe;
— l'opposée de ce volume sinon.

§ 11. Illustration :



parallélépipède de volume algébrique $\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3) > 0$

§ 12. Comme pour l'aire algébrique dans le plan, on observe que la fonction $\mathcal{V}$ est :

— alternée : le volume algébrique change de signe lorsque l'on échange deux vecteurs de la famille ;

— multilinéaire : les applications $x \mapsto \mathcal{V}(x, e_2, e_3)$, $x \mapsto \mathcal{V}(e_1, x, e_3)$ et $x \mapsto \mathcal{V}(e_1, e_2, x)$ sont linéaires.

Théorème 4.

■ Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base de E.

■ Soit (e_1, e_2, e_3) une famille de deux vecteurs, de matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 3}$ dans la base $\mathcal{B}$

★ Le volume orienté du parallélépipède $\mathcal{P}(e_1, e_2, e_3)$ est égal à

$$\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3) = \delta.\mathcal{V}(i, j, k)$$

où

$$\begin{aligned}\delta = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} &+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &- a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}\end{aligned}$$

démonstration rapide :

On décompose tous les vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} e_1 = a_{1,1}i + a_{2,1}j + a_{3,1}k \\ e_2 = a_{1,2}i + a_{2,2}j + a_{3,2}k \\ e_3 = a_{1,3}i + a_{2,3}j + a_{3,3}k \end{cases}$$

et donc , en exploitant la multilinéarité de $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3) \\ =&\mathcal{V}(a_{1,1}i + a_{2,1}j + a_{3,1}k, a_{1,2}i + a_{2,2}j + a_{3,2}k, a_{1,3}i + a_{2,3}j + a_{3,3}k) \\ =&a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\mathcal{V}(i, i, i) + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3}\mathcal{V}(i, i, j) + \cdots + a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\mathcal{V}(k, k, k) \\ &\text{(27 termes)}\end{aligned}$$

Or tous les termes de cette somme correspondant à deux vecteurs identiques sont nuls. Il reste donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3) =& a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\mathcal{V}(i, j, k) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}\mathcal{V}(i, k, j) + \\ &\cdots + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}\mathcal{V}(k, j, i) \text{ (6 termes)}\end{aligned}$$

Enfin puisque $\mathcal{V}$ est alternée nous avons les relations :

$$\mathcal{V}(i, j, k) = \mathcal{V}(j, k, i) = \mathcal{V}(k, i, j) \text{ et}$$
$$\mathcal{V}(j, i, k) = \mathcal{V}(i, k, j) = \mathcal{V}(k, j, i) = -\mathcal{V}(i, j, k)$$

Nous en déduisons la formule attendue.

Remarque. Ce nombre δ sera appelé le déterminant de la matrice $(a_{i,j})$., ou déterminant de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base (i, j, k).

On observera que δ est nul si et seulement si la famille (e_1, e_2, e_3) est liée (parallélépipède aplati).

Exercice 1. Calculer le volume du parallélépipède de $\mathbb{R}^3$ défini par les vecteurs

$$e_1 = (1, 2, 1),\ e_2 = (0, 3, 2),\ e_3 = (5, 1, 0)$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle directe ou indirecte ?
La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le volume (algébrique) cherché est le déterminant δ de cette matrice ; d'après le théorème précédent ce déterminant est

$$\begin{aligned} \delta &= 1 \times 3 \times 0 + 0 \times 1 \times 1 + 5 \times 2 \times 2 - 5 \times 3 \times 1 - 1 \times 1 \times 2 - 0 \times 2 \times 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ce volume algébrique est positif, donc la famille (e_1, e_2, e_3) est directe.
§ 13. Nous allons maintenant généraliser cette notion de déterminant en dimension quelconque.

2 Déterminant d'une matrice carrée

Notation. Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous notons

$$A_{[C_i \leftrightarrow C_j]}$$

la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes C_i et C_j.
Pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, notons aussi

$$A_{[C_j \leftarrow X]}$$

la matrice obtenue en remplaçant dans A la colonne C_j par X.
§ 14. L'observation attentive des calculs menés dans la partie I conduit à poser la définition suivante :

Définition 1.[fonction multilinéaire alternée]
■ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application.
★ On dit que f est *alternée selon les colonnes* si pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et tous indices i, j distincts,

$$f\left(A_{[C_i \leftrightarrow C_j]}\right) = -f(A)$$

★ On dit que f est *multilinéaire selon les colonnes* si pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tout indice i, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ X \mapsto f\left(A_{[C_i \leftarrow X]}\right) \end{cases}$$

est linéaire

Exemple 2.
- La fonction nulle est multilinéaire et alternée.
- Pour $n = 1$, toute application linéaire $\mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est multilinéaire alternée.

Exemple 3.
- l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ est multilinéaire alternée selon les colonnes.
- l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a(b - d) + cd$ est multilinéaire non alternée.

Définition 2.[et propriété fondamentale du déterminant d'une matrice carrée]
★ Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinéaire alternée selon les colonnes telle que $f(I_n) = 1$.
★ Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le nombre $f(A)$ est appelé le déterminant de A, noté $\det(A)$

-Pour $n = 1$, on obtient $\det : (a) \mapsto a$.
-Pour $n = 2$ ou $n = 3$, le calcul a été fait dans la partie I
- La démonstration du cas général est hors programme.

Notation. Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sera souvent noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

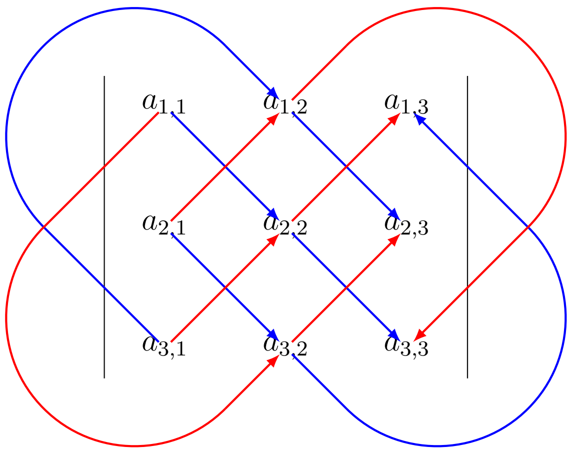
Exemple 4. Pour une matrice d'ordre 2, nous avons d'après la partie I (aire d'un parallélogramme) :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple 5. D'après la partie I (volume d'un parallélépipède) nous avons le formule suivante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

Remarque. Cette formule peut être mémorisée grâce au schéma suivant, appelé *règle de Sarrus* :



$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$
$$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

Exercice 2. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

1. $A = (-3)$
2. $B = (5)$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

solution :
(1)et (2) : $\det(A) = -3$, $\det(B) = 5$
3) $\det(C) = 19$
4) $\det(D) = 2$

Remarque. Il n'y a pas de "règle de Sarrus" pour $n \geqslant 4$. Il existe des formules explicites du déterminant d'ordre n, mais ces formules :

- ne sont pas au programme ;
- n'ont pas vraiment d'intérêt pratique, nous allons voir des méthodes efficaces de calcul dans la suite de ce cours.

3 Calcul par opérations élémentaires

§ 15. Étant donnés $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ distincts et $\lambda \in \mathbb{K}$, rappelons que :

- la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1 ;
- Les matrice de transvection sont définies par

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$$

Multiplier A à gauche (resp. à droite) par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à effectuer sur A l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$)

Théorème 5.[opérations élémentaires et déterminant]
■ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts
★ L'échange des colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$ dans A change le déterminant en son opposé
★ Si $\lambda \neq 0$, l'opération élémentaire (*dilatation*) $C_i \leftarrow \lambda C_i$ dans A multiplie le déterminant par λ
★ L'opération élémentaire (*transvection*) $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ dans A ne change pas le déterminant

démonstration :
1) C'est la définition d'une fonction alternée
2) Le déterminant est multilinéaire, donc $\det(A_{[C_i \leftarrow \lambda C_i]}) = \lambda \det(A_{[C_i \leftarrow C_i]}) = \lambda \det(A)$
3) Toujours par multilinéarité,

$$\det(A_{[C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j]}) = \det(A_{[C_i \leftarrow C_i]}) + \lambda \det(A_{[C_i \leftarrow C_j]}) = \det(A) + \lambda \det(A_{[C_i \leftarrow C_j]})$$

Or la matrice $A_{[C_i \leftarrow C_j]}$ a deux colonnes identiques, donc son déterminant est nul.

Exemple 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Nous avons par exemple les formules :

$$\det(A) \underset{C_1 \leftarrow \frac{1}{2} C_1}{=} 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

On pourrait bien sûr écrire bien d'autres relations en appliquant d'autres opérations élémentaires sur les colonnes.

Remarque. Attention, l'opération $C_1 \leftarrow 3C_1 + C_4$, composée d'une dilatation et d'une transvection, multiplie le déterminant par 3

Corollaire 6.
■ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
★ Si A a deux colonnes identiques ou une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$
★ Plus généralement si A n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$
★ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

démonstration :
1) Si les colonnes C_i et C_j de A sont identiques, avec $i \neq j$, alors $A = A_{[C_i \leftrightarrow C_j]}$ donc

$$\det(A) = \det(A_{[C_i \leftrightarrow C_j]}) = -\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$.
Si la colonne C_i est nulle, alors $A = A_{[C_i \leftarrow 2C_i]}$ donc

$$\det(A) = \det(A_{[C_i \leftarrow 2C_i]}) = 2\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$.
2) Si A n'est pas inversible, alors les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ foment une famille liée. Une des colonnes, disons C_1, est donc combinaison linéaire des autres : $C_1 = \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n$. En appliquant l'opération "élémentaire" $C_1 \leftarrow C_1 - \alpha_2 C_2 - \cdots - \alpha_n C_n$, on obtient

$$\det(A) = \det(A_{[C_1 \leftarrow 0]}) = 0$$

3)Pour passer de A à λA, on effectue successivement les opérations $C_j \leftarrow \lambda C_j$ pour tout j de 1 à n. Donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

§ 16. Nous avons vu que toute matrice peut être transformée, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, en matrice échelonnée (éventuellement réduite) par l'algorithme du pivot de Gauss. On peut bien sûr adapter cet algorithme et utiliser des opérations sur les colonnes. Ainsi tout calcul de déterminant peut se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Exemple 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculons $\det(A)$ en appliquant complètement l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned}
\det(A) &\underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow \frac{C_3}{8} \\ C_2 \leftarrow -C_2}}{=} 8.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 5C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3}}{=} 8.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} 8.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8\det(I_3)
\end{aligned}$$

Or $\det(I_3) = 1$, donc $\det(A) = 8$.
En pratique il n'est pas utile de pousser l'algorithme jusqu'au bout, nous allons voir que le déterminant d'une matrice triangulaire se calcule facilement.

Proposition 7.
★ Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

démonstration :
Soit $A = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une matrice diagonale.
- Si l'un des coefficients de A est nul, alors A a une colonne nulle, donc $\det(A) = 0 = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j$
-Sinon, appliquons les opérations élémentaires $C_j \leftarrow \frac{1}{\alpha_j} C_j$ à A, pour j allant de 1 à n, nous obtenons

$$\det(A) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \det(I_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

Lemme 8.[méthode de Gauss pour des matrices inversibles]
★ Toute matrice inversible A peut être transformée, par une suite de transvections sur les colonnes, en une matrice diagonale
★ Si de plus A est triangulaire inférieure ou supérieure, alors on peut choisir ces transvections de manière à laisser la diagonale de A inchangée.

démonstration rapide :
1) Il s'agit d'adapter l'algorithme de Gauss pour ne pas échanger de colonnes dans A (et donc utiliser les coefficients diagonaux comme pivots). C'est possible quand A est inversible :
-> À la première étape de l'algorithme il n'y a rien à faire si $a_{1,1} \neq 0$.
-> En revanche si $a_{1,1} = 0$, on observe qu'au moins une colonne de A (disons C_j a un premier coefficient $a_{1,j}$ non nul (sans quoi A ne pourrait être inversible). Il suffit alors d'appliquer la transvection $C_1 \leftarrow C_1 + C_j$ pour se ramener à un coefficient d'indice $(1, 1)$ non nul.
-> en menant l'algorithme jusqu'au bout, on obtient une matrice triangulaire inférieure à diagonale non nulle, et enfin une matrice diagonale après réduction.
2) A est inversible, donc sa diagonale n'est pas nulle. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme de Gauss avec les coefficients diagonaux comme pivots.

Théorème 9.[déterminant d'une matrice triangulaire]
★ Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

démonstration rapide :
Soit A triangulaire inférieure ou supérieure.
- Si l'un des coefficients diagonaux de A est nul, alors A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$ est bien égal au produit des coefficients diagonaux.
- Sinon : notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les coefficients diagonaux de A. Comme une transvection sur les colonnes ne change pas le déterminant, nous avons grâce au lemme :

$$\det(A) = \det(diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

§ 17. En résumé, pour calculer un déterminant, nous pourrons :

1. appliquer d'abord des opérations élémentaires (sur les colonnes ou sur les lignes, voir partie suivante) pour nous ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire
2. puis utiliser le théorème précédent.

Exemple 8. Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_2 \leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_4 \leftarrow C_4 + 3C_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -1 \times 1 \times (-2) \times 3 = 6
\end{aligned}$$

On pourra vérifier qu'utiliser des opérations sur les lignes donne bien le même résultat.

Exercice 3. Calculer $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

réponse :
Nous utilisons des opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times 1 \times (-1) \times (-2) = -2
\end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

réponse :

Nous pouvons par exemple écrire :

$$\det(A) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+4L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-11L_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 23 & -17 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{23}{10}L_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 10 \times \frac{7}{5}$$

$$= -14$$

§ 18. En pratique il est important de savoir si un déterminant est nul ou non. Lorsque ce déterminant contient des paramètres, nous aurons donc besoin de le calculer *sous forme factorisée.*

Exemple 9. Calculons, en fonction du paramètre x et sous *forme factorisée*, le nombre

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}$$

-**Première méthode, à éviter !** : il s'agit d'un déterminant d'ordre 3, on peut le calculer en appliquant la règle de Sarrus ; on obtient la *forme développée* :

$$\delta(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Il est bien sûr possible, mais fastidieux, de factoriser ce polynôme (recherche de racines...)

-**Deuxième méthode, à privilégier pour les déterminants contenant des paramètres** : nous utilisons des opérations élémentaires :

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1+x & x & 2 \\ 1+x & x & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2}}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)(x-2)$$

Exercice 5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer, sous forme factorisée, le déterminant de la matrice d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

indication : commencer par appliquer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. On pourra s'entraîner d'abord sur des cas particuliers $n \leqslant 4$

réponse :

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ donne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda+n-1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \lambda+n-1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Appliquons alors les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i allant de 1 à $n-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} \lambda+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+n-1)(\lambda-1)^{n-1}\end{aligned}$$

4 Propriétés du déterminant matriciel

Théorème 10.[caractérisation des matrices inversibles]
★ A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

démonstration rapide :
- On a déjà vu que A non inversible $\Rightarrow \det(A) = 0$.
- Réciproquement, supposons A inversible. D'après les lemmes précédents, A a même déterminant qu'une matrice diagonale D obtenue par une suite de transvections sur les colonnes. Or les opérations élémentaires ne changement pas le rang d'une matrice, donc $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(A) = n$, donc D est inversible. Donc ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc son déterminant (produit des coefficients diagonaux) est non nul. Donc $\det(A) \neq 0$.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

réponse :
Nous trouvons $\det(A) = (x-3)(1-2x)$; donc A est inversible si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq \frac{1}{2}$

Théorème 11.[déterminant et produit matriciel]
■ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ une matrice inversible
★ $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
★ $\det(A^k) = (\det A)^k$
★ Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
★ $\det(P^{-1}AP) = \det A$

démonstration rapide :
1) Si A n'est pas inversible, alors AB non plus (en effet $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant n-1$), donc $\det(AB) = 0 = \det(A).\det(B)$. Supposons maintenant A inversible et posons

$$f : M \mapsto \frac{1}{\det(A)} \det(AM)$$

On vérifie que la fonction f est multilinéaire alternée selon les colonnes, avec $f(I_n) = 1$. Donc $f = \det$. donc $\frac{\det(AB)}{\det(A)} = f(B) = \det(B)$.
2)récurrence immédiate
3) On a $AA^{-1} = I_n$ donc $1 = \det(I_n) = \det(A).\det(A^{-1})$
4) $\det(P^{-1}AP) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(A) \times \det(P) = \det(A)$.
Remarque. Attention $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général.

Théorème 12.[déterminant et transposée]
★ Une matrice A et se transposée A^T ont le même déterminant
★ Une opération élémentaire sur les lignes d'un déterminant a le même effet que l'opération analogue sur les colonnes.

démonstration :
-Si A n'est pas inversible, alors A^T non plus, donc $\det(A^T) = \det(A) = 0$.
-Supposons maintenant A inversible. Il existe une matrice M, produit de matrices de transvections (correspondants à des opérations élémentaires effectuées sur les colonnes de A), telle que $A.M = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. De plus $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$. Transposoons cette relation, il vient :

$$M^T.A^T = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

donc $\det(M^T.A^T) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \det(A)$. Or la transposée d'une matrice de transvection est aussi une matrice de transvection, donc M^T est un produit de matrices de transvection. En particulier $\det(M^T) = 1$. Donc

$$\det(A) = \det(M^T A^T) = \det(M^T)\det(A^T) = \det(A^T)$$

5 Développement selon une ligne ou une colonne

§ 19. Nous allons voir maitenant une technique qui permet d'exprimer un déterminant d'ordre n en fonctions de plusieurs déterminants d'ordre $n-1$.
Dans toute cette partie, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Notation. Étant donnés $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, nous notons $\hat{A}_{i,j}$ la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j de A.

Définition 3.[cofacteurs]
★ Le nombre

$$\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{i,j})$$

est appelé le *cofacteur* de A d'indice (i,j).

Exemple 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Le cofacteur d'indice $(1,1)$ de A est

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

Le cofacteur d'indice $(3,2)$ de A est

$$(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -10$$

§ 20. Nous allons établir des relations entre le déterminant de A et ses cofacteurs. Nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 13.
■ Soit $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
★ $\begin{vmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \det(M)$

démonstration rapide :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ On constate d'abord, en combinant les colonnes de A avec C_1, que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

On considère alors la fonction $f : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $f(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$. Cette fonction est multilinéaire, alternée, et de plus $f(I_{n-1}) = \det(I_n) = 1$. Par conséquent pour toute $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $f(M) = \det(M)$, cqfd.

Lemme 14.
■ Soit $\mathcal{B} = (E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
★ Le cofacteur $\alpha_{i,j}$ de A est égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne C_j de A par E_i.

démonstration :
Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ fixés. Notons M la matrice obtenue à partir de A en remplaçant C_j par E_i :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On applique à M les opérations élémentaires suivantes :
-> $L_k \leftrightarrow L_{k-1}$ pour $k = i$, $k = i-1$ ... jusquà $k = 2$. On obtient

$$\det(M) = (-1)^{i-1} . \begin{vmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

-> puis on effectue les opérations $C_k \leftrightarrow C_{k-1}$ pour $k = j$, $k = j - 1$ ... jusquà $j = 2$:

$$\det(M) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}.\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0_{n-1,1} & \hat{A}_{i,j} \end{pmatrix}$$

On applique enfin le lemme précédent :

$$\det(M) = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{i,j}) = \alpha_{i,j}.$$

Théorème 15.[développement selon une ligne ou une colonne]
■ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soient $(\alpha_{i,j})$ les cofacteurs de A. Avec ces notations,
★ $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(\hat{A}_{i,k})$ (formule de développement selon la colonne k)
★ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(\hat{A}_{k,j})$ (formule de développement selon la ligne k)

démonstration
1) Nous écrivons $C_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} E_i$ et appliquons la multilinéarité du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A_{[C_k \leftarrow \sum_{i=1}^n a_{i,k} E_i]}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \det(A_{[C_k \leftarrow E_i]}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \alpha_{i,k} \text{ (lemme précédent)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(\hat{A}_{i,k}) \text{ (définition des cofacteurs)} \end{aligned}$$

2) On applique le point précédent avec la colonne k de A^T, puis on utilise la relation $\det(A) = \det(A^T)$.

Exemple 11. Calculons $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ en développant selon la première colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times (-1) - 3 \times (-5) + 5 \times 3 \\ &= 32 \end{aligned}$$

§ 21. Ces formules sont surtout utiles lorsque tous les coefficients d'une ligne ou d'une colonne sauf un sont nuls. En effet il n'y a alors qu'un seul cofacteur à calculer.
Il est bien sûr possible d'utiliser des opérations élémentaires (pour faire apparaître des coefficients nuls) puis de développer selon une ligne ou une colonne (ce qui réduit la taille du déterminant à calculer).

Exemple 12. Calculons $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

- Il est judicieux de développer ce déterminant selon sa troisième colonne, ce qui donne :

$$\delta = (-1)^{2+3}.2.\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- Après opération élémentaire,

$$\delta \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

-Nous développons maintenant selon la première colonne :

$$\delta = -2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -30$$

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer et factoriser $\det A$ où $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$:

1. avec la "règle de Sarrus"
2. par des opérations élémentaires
3. par un développement selon une ligne ou une colonne

réponse :
1) La règle de Sarrus donne

$$\det(A) = \alpha^2 - 36 + 0 - 0 - 0 - 0 = (\alpha - 6)(\alpha + 6)$$

2) Avec des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} \det(A) &\underset{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha - 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ \alpha - 6 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha - 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha \end{vmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{=} \begin{vmatrix} \alpha - 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha + 6 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - 6)(\alpha + 6) \end{aligned}$$

3) En développant selon la première ligne,

$$\det(A) = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -6 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 36 = (\alpha - 6)(\alpha + 6)$$

6 Déterminant d'une famille de vecteurs

§ 22. Dans cette partie E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

Définition 4.[déterminant d'une famille de vecteurs]
■ Soit $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E (le nombre de vecteurs doit être égal à $\dim(E)$).
★ Le déterminant de la matrice de la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est appelé *déterminant de la famille* $(f_1, \cdots, f_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, noté $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \cdots, f_n)$

Remarque. Ce type de déterminant :

— est alterné : échanger deux vecteurs change le déterminant en son opposé ;

— est multilinéaire : pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, l'application $E \to \mathbb{K}$,

$$x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1, \cdots, f_{p-1}, x, f_{p+1}, \cdots, f_n)$$

est linéaire

Remarque. D'après les calculs effectués dans la partie I pour $n = 2$ ou $n = 3$, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \cdots, f_n)$ est le quotient des aires ou volumes orientés des parallélépipèdes $\mathcal{P}(f_1, \cdots, f_n)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Remarque. Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \cdots, f_n)$ dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Exemple 13.

1. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det(I_n) = 1$
2. Si un des vecteurs $f_1, \cdots, f_n$ est nul, alors le déterminant de la famille est nul (dans toute base).

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (3, X-2, X^2+1)$.
Calculer le déterminant de la famille $(f_1 = X^2 + 1, f_2 = X^2 + 2X - 3, f_3 = X^2 + X + 1)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

solution :
Notons A (resp. A') la matrice de la famille dans la base $\mathcal{B}$ (resp. dans la base $\mathcal{B}'$).

-Sans calcul, on voit que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, f_3) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

- On a les relations

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 + 1) \\ f_2 = 2.(X-2) + (X^2+1) \\ f_3 = \frac{2}{3}.3 + (X-2) + (X^2+1) \end{cases}$$

dont on déduit $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\det_{\mathcal{B}'}(f_1, f_2, f_3) = \det(A') = -\frac{4}{3}$$

§ 23. En dehors des calculs d'aires ou de volumes, le déterminant permet surtout de caractériser les bases :

Théorème 16.[caractérisation des bases]
★ Une famille de n vecteurs de E est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.

démonstration :
$(f_1, \cdots, f_n)$ est une base si et seulement si sa matrice $M_B(f_1, \cdots, f_n)$ est inversible. Or nous avons vu que les matrices inversibles sont exactement les matrices de déterminant non nul, d'où le résultat.

Remarque. Si B et B' sont des bases de E, alors $\det_B(B')$ est égal au déterminant de la matrice de passage $\mathcal{P}_{B,B'}$ de B vers B'. En particulier les nombres $\det_B(B')$ et $\det_{B'}(B)$ sont inverses l'un de l'autre.
Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en accord avec la notion de volume algébrique vue en partie I, nous dirons que deux bases B et B' ont *la même orientation* lorsque $\det_B(B') > 0$. Le signe du déterminant permet donc de savoir si une base est directe ou indirecte.
Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (i, j, k)$. On pose $e_1 = i - 2j$, $e_2 = 2i + j + k$ et $e_3 = 3j + 2k$.
Montrer que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Comparer l'orientation de B et de B'.
réponse :
La matrice de B' dans B est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Puisque $\det_B(B') \neq 0$, nous pouvons affirmer que B' est une base de E. par ailleurs $\det_B(B') > 0$ donc les bases B et B' ont la même orientation.

7 Déterminant d'un endomorphisme

§ 24. Dans cette partie E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. On se donne un endomorphisme u de E (ie une application linéaire $u : E \to E$)

Définition 5.
★ Le déterminant de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.
★ Ce nombre est appelé le déterminant de l'endomorphisme de u, noté $\det(u)$.

démonstration :
Soient B, B' des bases de E et A, A' les matrices correspondantes de u. On a la relation de changement de base $A' = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de B à B'. Donc

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

Remarque. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, le nombre $\det(u)$ est le quotient des aires ou volumes orientés des parallélépipèdes $\mathcal{P}(u(\mathcal{B}))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.
Exercice 10. Calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$u : P \mapsto P(0)X^2 + P(1)X + P(2)$$

réponse :
On choisit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule

$$u(1) = 1 + X + X^2, \quad u(X) = 2 + X, \quad u(X^2) = 4 + X$$

donc $M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\det(u) = \det(M_B(u)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Théorème 17.
■ Soit $(f_1, \cdots, f_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs.
■ Soient u, v des endomorphismes de E, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$
★ $\det_{\mathcal{B}}(u(f_1), \cdots, u(f_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(f_1, \cdots, f_n)$
★ $\det(0) = 0$, $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
★ $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
★ $\det(u \circ v) = \det(u). \det(v)$
★ u est bijectif si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Le cas échéant $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

démonstration :
1) Admis
2,3,4,5) : on applique les propriétés du déterminant d'une matrice carrée.