Chapitre 17 - Espaces vectoriels de dimension finie

Table des matières

§ 1. Certains espaces vectoriels, dits *de dimension finie*, ont un certain nombre de propriétés remarquables. Dans ce chapitre :

- Nous définissons les espaces de dimension finie et démontrons les théorèmes fondamentaux
- Nous en déduisons des propriétés spéciales des sous-espaces vectoriels, des familles de vecteurs et des applications linéaires en dimension finie
- La théorie de la dimension fournit une correspondance remarquable entre les *vecteurs et applications linéaires* d'une part (objets de nature géométrique) et les *matrices* d'autre part (objets de type numérique)

§ 2. Dans tout ce chapitre on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et n, p, q, r sont des entiers naturels.

1 Théorie de la dimension

Définition 1.
★ On dit que E est de *dimension finie* lorsqu'il existe un sous-ensemble fini A de E tel que $Vect(A) = E$.

Remarque. Si on note $A = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ($n = card(A)$), la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est alors une famille génératrice de E.

Exemple 1.

- $\{0\}$ est de dimension finie, engendré par la famille vide.
- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, engendré par sa base canonique
- $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension finie, engendré par sa base canonique $(1, X, \cdots X^n)$
- $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie, engendré par les matrices élémentaires $E_{i,j}$, $i \leq n$, $j \leq p$.

Exemple 2. Montrons par l'aburde que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ n'est pas de dimension finie. Supposons qu'il existe une famille $(P_1, \cdots, P_n)$ finie génératrice de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Posons $N = \max(\deg(P_1), \cdots, \deg(P_n))$. Toute combinaison linéaire de $P_1, \cdots, P_n$ a donc un degré $\leqslant N$, ie

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(P_1, \cdots, P_n) \subset \mathbb{K}_N[\mathrm{X}]$$

ce qui est absurde. Donc $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

§ 3. Nous allons voir qu'un espace vectoriel de dimension finie est caractérisé par un nombre entier (qui sera appelé sa dimension).

Lemme 1.
■ Soit $(e_1, \cdots, e_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs.
★ Toute famille de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

démonstration :
Par récurrence sur n.
- si $n = 0$: Il suffit de voir qu'une famille d'un vecteur de $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ est bien liée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété établie au rang $n-1$. Soient $(e_1, \cdots, e_n) \in E^n$ et soient $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ dans $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. Il existe donc une famille de scalaires

$$(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n+1}$$

telle que

$$\forall j \leqslant n+1 \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} e_i$$

On va distinguer deux cas :
-> Si $\forall j \in [\![1, n+1]\!] \quad \alpha_{n,j} = 0$: les vecteurs $f_1, \cdots, f_n$ appartiennent tous à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$.

Par hypothèse de récurrence, la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée, donc $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ est liée.
-> Sinon : on va s'inspirer de la méthode du pivot de Gauss pour construire une famille de n vecteurs de $Vect(e_1, \cdots e_{n-1})$.
Quitte à permuter les vecteurs $f_1, \cdots f_{n+1}$, on peut supposer $\alpha_{n,n+1} \neq 0$. On définit alors des vecteurs $g_1, \cdots, g_n$ par

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad g_j = f_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} f_{n+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \alpha_{i,n+1} \right) e_i$$

Le coefficient devant e_n dans g_j est nul, donc $g_1, \cdots, g_n$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$. Appliquons l'hypothèse de récurrence : la famille $(g_1, \cdots, g_n)$ est liée. Donc

$$\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j = 0_E$$

On calcule alors :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(f_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} f_{n+1} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j - \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \right) f_{n+1}$$

donc la famille $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ est liée.

Théorème 2.[de la base incomplète]
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soient $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ et $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_q) \in E^q$ des familles de E respectivement libre et génératrice.
★ $p \leqslant q$
★ On peut compléter $\mathcal{E}$ par des vecteurs de $\mathcal{F}$ pour obtenir une base de E.
★ Il existe une sous-famille de $\mathcal{F}$ qui est une base de E.

1) D'après le lemme, toute famille de $q + 1$ vecteurs de $Vect(\mathcal{F})$ est liée. Or $\mathcal{F}$ étant génératrice on a $Vect(\mathcal{F}) = E$. Comme $\mathcal{E}$ n'est pas liée, on a bien $p \leqslant q$.
2) Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ de tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante :
« il existe une famille libre de n vecteurs, contenant les p vecteurs de $\mathcal{E}$ et $n - p$ vecteurs de $\mathcal{F}$ »
Nous observons que $\mathcal{A}$ est non vide ($p \in \mathcal{A}$) et majoré par q d'après la proposition précédente. Donc $\mathcal{A}$ a un maximum que nous notons N. Soit $B = (e_1, \cdots, e_p, \cdots, e_N)$ une famille libre correspondante, montrons que c'est une base de E.
Raisonnons par l'absurde en supposant que cette famille n'est pas génératrice. $E = Vect(\mathcal{F})$ n'est donc pas inclus dans $Vect(B)$. Il existe donc au moins un vecteur de $\mathcal{F}$ qui n'est pas dans $Vect(B)$, appelons-le e_{N+1}.
Puisque B est libre et $e_{N+1} \notin Vect(B)$, la famille $(e_1, \cdots e_{N+1})$ est libre. En particulier $N + 1 \in \mathcal{A}$.
Or $N = max(\mathcal{A})$: contradiction
3) on applique (2) avec une famille libre vide.

Exemple 3. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$.
Soient $e_1 = (-1, 0, 1)$ et $e_2 = (2, 0, 1)$.

- On voit facilement que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$
- Admettons provisoirement que toute base de $\mathbb{R}^3$ contient 3 vecteurs (voir théorème de la dimension juste après !). Comme (i, j, k) est génératrice, le théorème de la base incomplète dit que l'une des familles (e_1, e_2, i), (e_1, e_2, j) et (e_1, e_2, k) est une base de $\mathbb{R}^3$

— Sur cet exemple on voit que les familles (e_1, e_2, i) et (e_1, e_2, k) sont liées. La famille (e_1, e_2, j) est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $e_1 = (-1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 1, 1)$. Compléter (e_1, e_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.

réponse :

La famille (e_1, e_2) est libre. Pour obtenir une base, il suffit de trouver un vecteur de la base canonique qui n'est pas combinaison linéaire de (e_1, e_2).

Posons par exemple $e_3 = (0, 1, 0)$, et montrons que (e_1, e_2, e_3) est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ réels tels que $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k e_k = 0$. On a alors

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est libre. En admettant que toute base de $\mathbb{R}^3$ est constituée de 3 vecteurs, nous avons bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (0, 2)$ et $e_3 = (1, 3)$.

1. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est génératrice et liée.
2. Trouver une sous-famille qui est une base de $\mathbb{R}^2$

réponse :

1) Nous avons $(1, 0) = e_1 - \frac{1}{2}e_2 \in Vect(e_1, e_2, e_3)$ et $(0, 1) = \frac{1}{2}e_2 \in Vect(e_1, e_2, e_3)$. Donc

$$\mathbb{R}^2 = Vect((1, 0), (0, 1)) \subset Vect(e_1, e_2, e_3)$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est bien génératrice.

De plus on a la relation $e_1 + e_2 - e_3 = 0$ donc la famille est liée.

2)La sous-famille (e_1, e_2) est libre, et $Vect(e_1, e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^2$, donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.[de la dimension]

♦ E est supposé de dimension finie.

★ Il existe (au moins) une base dans E.

★ Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

démonstration :

1) E est de dimension finie, donc a une famille génératrice finie. D'après le théorème précédent, on peut extraire de cette famille une base de E.

2) Soient B_1 et B_2 des bases de E.

B_1 est libre et B_2 est génératrice, donc $\text{Card}(B_1) \leqslant \text{Card}(B_2)$.

En inversant les rôles on a de même $\text{Card}(B_2) \leqslant \text{Card}(B_1)$. Donc $\text{Card}(B_1) = \text{Card}(B_2)$.

Définition 2.[dimension]

♦ E est supposé de dimension finie.

★ Le nombre de vecteurs d'une base quelconque de E est appelé la *dimension* de E, noté $\dim(E)$.

Exemple 4.

— La famille vide est une base de $\{0\}$ donc $\dim(\{0\}) = 0$

— La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une base constituée de n vecteurs, donc $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

— Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ donc $\dim(\mathbb{K}_n[\text{X}]) = n + 1$

— $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np ; une base est donnée par la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$.

Exemple 5. Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène « $y' - a(x)y = 0$ » est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
Une base est la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ où A est une des primitives de a sur I.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, en donner une base.

réponse : Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$, avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit, l'ensemble S des solutions est engendré par les deux vecteurs $e_1 : x \mapsto \cos(2x)$ et $e_2 : x \mapsto \sin(2x)$.
On vérifie facilement que (e_1, e_2) est libre, donc c'est une base de S et $\dim(S) = 2$.

Théorème 4.[classification des espaces de dimension finie]
★ Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

démonstration :
Soient E et F de dimension finie.
-Supposons E et F isomorphes. Soit $\varphi : E \to F$ un isomorphisme et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Comme φ est linéaire bijective, la famille $(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ est une base de F. Donc $\dim(F) = n = \dim(E)$.
- Réciproquement supposons $\dim(E) = \dim(F) = n$, et soient $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ des bases respectives de E et F. Soit $\varphi : E \to F$ l'unique application linéaire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \varphi(e_i) = f_i$$

L'application φ envoie une base de E sur une base de F, donc φ est bijective : c'est un isomorphisme de E vers F.

Théorème 5.[familles libres en dimension finie]
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille *libre* de E.
★ $p \leqslant \dim(E)$
★ La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base si et seulement si $p = \dim(E)$.

démonstration
1) On a montré que le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal au cardinal d'une famille génératrice quelconque, et en particulier d'une base de E. Donc $p \leqslant \dim(E)$.
2)
- Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base, alors $p = \dim(E)$ d'après le théorème de la dimension.
- Inversement supposons $p = \dim(E)$, montrons que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base. D'après la théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $f_1, \cdots f_q$ de E tels que $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ est une base de E. D'après le théorème de la dimension on a donc $p+q = \dim(E)$, autrement dit $\dim(E)+q = \dim(E)$, donc $q = 0$. La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est bien une base de E.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $e_1 = (-1, 2)$ et $e_2 = (1, 1)$.
Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

réponse :
(e_1, e_2) est une famille libre (vérification facile, laissée en exercice) de deux vecteurs. Or $\dim(R^2) = 2$. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice 5. Soient $(P_0, \cdots, P_n)$ des polynômes tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \deg(P_k) = k$$

Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
réponse :
La famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est à degrés échelonnés, donc est libre. Par ailleurs c'est une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$; or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, donc $(P_0, \cdots, P_n)$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème 6.[familles génératrices en dimension finie]
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une famille *génératrice* de E.
★ $q \geqslant \dim(E)$
★ La famille $(e_1, \cdots, e_q)$ est une base si et seulement si $q = \dim(E)$.

démonstration :
1) On a montré que le cardinal d'une famille libre, et en particulier d'une base, est inférieur ou égal au cardinal d'une partie génératrice quelconque. Donc $q \geqslant \dim(E)$.
2)
- Si $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base on a bien $q = \dim(E)$ par le théorème de la dimension.
- Notons $n = \dim(E)$ et supposons $q = \dim(E)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une sous-famille B de $(e_1, \cdots, e_q)$ qui est une base de E. D'après le théorème de la dimension, B doit contenir n vecteurs. Or $n = q$, donc $B = (e_1, \cdots, e_q)$.

Exercice 6. On pose $F = \left\{ \ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x - y = x + y + z + t = 0 \ \right\}$.
Montrer que F est un plan vectoriel dont on donnera une base.
réponse :
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Ce vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ t = -2x - z \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \ (x, x, z, -2x - z) \quad / \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \ \right\} \\ &= Vect((1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)) \end{aligned}$$

Notons $e_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $e_2 = (0, 0, 1, -1)$. La famille (e_1, e_2) est donc une famille génératrice de F. Par ailleurs on vérifie facilement que c'est une famille libre. Donc (e_1, e_2) est une base de F. En particulier $\dim(F) = 2$.

Exercice 7. Montrer l'équivalence des propositions :

1. E n'est pas de dimension finie
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille libre de n vecteurs dans E.

réponse :
- *non*$(1) \Rightarrow$ *non*(2) : Si E est de dimension finie n, il n'existe pas de famille libre de $n+1$ vecteurs dans E. Donc (2) est faux.
- $(1) \Rightarrow (2)$: Supposons que E n'est pas de dimension finie. Construisons une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E par récurrence :
-> Choisissons $e_1 \in E \setminus \{0\}$
-> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $(e_1, \cdots, e_n)$ choisis. Comme E n'est pas de dimension finie, la famille finie $(e_0, \cdots, e_n)$ n'est pas génératrice. Donc $E \neq \mathrm{Vect}(e_0, \cdots, e_n)$, nous pouvons donc choisir $e_{n+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_0, \cdots, e_n)$.
Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left\{ \ e_k \quad / \quad 1 \leq k \leq n \ \right\}$ est une famille libre de n vecteurs de E.

Exercice 8. On appelle droite (resp. plan) vectorielle un espace vectoriel E tel que $\dim(E) = 1$ (resp. $\dim(E) = 2$) (définitions à connaître)

1. Donner des exemples de droites vectorielles et de plans vectoriels.
2. Soit E une droite vectorielle. Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E sont $\{0\}$ et E.
3. Montrer qu'un plan vectoriel contient une infinité de droites vectorielles (*indication : soit* (e_1, e_2) *une base de* E*, étudier* $D_\lambda = Vect(e_1 + \lambda e_2)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$)

réponse :
1) $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_0[X]$ sont des droites vectorielles. $Vect((-1,4))$ est une droite vectorielle (sous-espace de $\mathbb{R}^2$). $\mathbb{K}^2$, $\mathbb{K}_1[X]$ sont des plans vectoriels. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre aussi.
2) Soit F un sous-espace non nul de E. Il est clair que $F \subset E$. Soit $b \in F \setminus \{0\}$. la famille (b) est une famille libre d'un vecteur dans E, avec $\dim(E) = 1$. Donc (b) est une base de E. Donc $E = \mathrm{Vect}(b) \subset F$. Finalement $E = F$
3) On va montrer que les droites D_λ sont 2 à 2 distinctes. Soient $\lambda \neq \mu$ réels, montrons que $D_\lambda \cap D_\mu = \{0\}$. Soit $x \in D_\lambda \cap D_\mu$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x = \alpha(e_1 + \lambda e_2) = \beta(e_1 + \mu e_2)$$

Or (e_1, e_2) est libre, donc $\alpha = \beta$ et $\lambda\alpha = \mu\beta$. Comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $\alpha = \beta = 0$ et donc $x = 0$.

2 Sous-espaces en dimension finie

§ 4. On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Théorème 7.
■ Soit F un sous-espace vectoriel de E
★ F est de dimension finie
★ $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
★ $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$

démonstration :
-Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de F. C'est aussi une famille libre de E. Or $\dim(E) = n$, donc $p \leqslant n$. On en déduit que F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant n$.
-Supposons $\dim(F) = n$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F. Cette famille est libre dans E, et contient $n = \dim(E)$ vecteurs, donc c'est une base de E. Par conséquent $F = Vect(e_1, \cdots, e_n) = E$

Corollaire 8.
■ Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$.
★ Dans ces conditions, $\dim(F) \leqslant \dim(G)$
★ avec égalité si et seulement si $F = G$

Exemple 6. Soit $F = Vect((1,1),(3,-1))$, montrons que $F = \mathbb{R}^2$.
L'inclusion $F \subset \mathbb{R}^2$ est immédiate. De plus la famille $(1,1),(3,-1)$ est une famille libre et génératrice de 2 vecteurs de F, donc $\dim(F) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. On en déduit $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = Vect((1,1,-2),(1,-1,0)) \quad G = \left\{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x+y+z=0 \ \right\}$$

1. Montrer rapidement que $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) \leqslant 2$
2. Montrer que $F \subset G$, puis que $F = G$

réponse :
1) Les deux vecteurs qui engendrent F forment une famille libre, donc $\dim(F) = 2$.
G est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, distinct de $\mathbb{R}^3$ (par exemple $(1,0,0) \notin G$) donc $\dim(G) \leqslant \dim(\mathbb{R}^3)-1 = 2$
2) On a $1+1-2=0$ et $1-1+0=0$, donc $(1,1,-2) \in G$ et $(1,-1,0) \in G$, donc $F \subset G$. Or $\dim(F) \geqslant \dim(G)$ d'après la question 1, donc $F = G$.

Théorème 9.[existence de supplémentaires]
■ Soit F un sous-espace vectoriel de E
★ F a (au moins) un sous-espace supplémentaire (i un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$)
★ Pour tout supplémentaire G de F dans E,

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$$

démonstration : Soit $p = \dim(F)$ et soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F. Cette famille est libre dans E, donc par le théorème de la base incomplète on peut trouver des vecteurs $f_1, \cdots, f_q \in E$ tels que $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ est une base de E. Posons

$$G = \mathrm{Vect}\{f_1, \cdots, f_q\}$$

-> La famille $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ est libre, donc les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_q)$ sont en somme directe.
-> La famille $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ est génératrice, donc

$$F + G = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q) = E$$

Donc F et G sont supplémentaires.
Remarque.
— L'entier $\dim(E) - \dim(F)$ est appelé la codimension de F, notée $\mathrm{codim}(F)$
— Si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$, alors F a une infinité de supplémentaires.

Exemple 7. Déterminons un supplémentaire de $F = Vect((-1,4))$ dans $\mathbb{R}^2$.
-Une base de F est (e_1) avec $e_1 = (-1,4)$. Au passage $\dim(F) = 1$.
-Complétons (e_1) en une base de $\mathbb{R}^2$. Considérons $e_2 = (1,0)$. Il est clair que (e_1, e_2) est une famille libre. De plus $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc cette famille de 2 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^2$.
-Par conséquent le sous-espace $G = Vect(e_2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Trouver un supplémentaire de $F = \left\{ \ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad / \quad x+y = y-z = 0 \ \right\}$ dans $\mathbb{R}^4$

réponse :
-On résout d'abord le système d'équation définissant F. On trouve par exemple :

$$F = \left\{ \ (x,-x,-x,t) \quad / \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ \right\} = Vect(e_1, e_2)$$

où on a posé $e_1 = (1,-1,-1,0)$ et $e_2 = (0,0,0,1)$. La famille (e_1, e_2) est une base de F, et $\dim(F) = 2$.
-Posons maintenant $e_3 = (1,0,0,0)$ et $e_4 = (0,1,0,0)$. On vérifie facilement que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre ; or $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ et cette famille contient 4 vecteurs, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
-Finalement l'ensemble $G = Vect(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Lemme 10.
■ Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E en somme directe.
★ $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

démonstration :
F et G sont supplémentaires dans $F \oplus G$, il suffit donc d'utiliser le théorème précédent avec $E = F \oplus G$.

Théorème 11.[formule de Grassmann]
■ Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
★ $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

démonstration :
$F \cap G$ est un sous-espace de G, donc il existe un sous-espace G_1 de G tel que $(F \cap G) \oplus G_1 = G$.
- Montrons que $F + G = F \oplus G_1$.
-> D'abord $F + G = F + ((F \cap G) + G_1) = (F + (F \cap G)) + G_1 = F + G_1$
->Montrons que $F \cap G_1 = \{0\}$ On a l'inclusion évidente $F \cap G_1 \subset G_1$. De plus $G_1 \subset G$ donc $F \cap G_1 \subset F \cap G$. Par conséquent $F \cap G_1 \subset G_1 \cap (F \cap G) = \{0\}$.
-Nous avons bien $F + G = F \oplus G_1$. En particulier

$$\dim(F+G) = \dim(F \oplus G_1) = \dim(F) + \dim(G_1)$$

Enfin G_1 et $F \cap G$ sont supplémentaires dans G, donc

$$\dim(G_1) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

on en déduit bien la formule attendue.

Corollaire 12.
■ Pour tous sous-espaces F, G de E,
★ $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$
★ avec égalité si et seulement si F et G sont en somme directe.

démonstration :
D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$$

avec égalité si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0_E\}$.
Exercice 11. On appelle *hyperplan* de E un sous-espace de dimension $\dim(E) - 1$.

1. Montrer que $H = \left\{ \ P \in \mathbb{R}_2[X] \quad / \quad P(2) = 0 \ \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, en donner une base.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que H est un hyperplan si et seulement si il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$
3. Soit H un hyperplan de E et F un sous-espace de E. Que dire du sous-espace $H + F$? Montrer que $\dim(F \cap H) \geqslant \dim(F) - 1$
4. Soient $H_1, H_2, \ldots, H_p$ des hyperplans de E. Montrer que

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_p) \geqslant \dim(E) - p$$

réponse :
1) On vérifie facilement que H est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_2[X]$. De plus $1 \notin H$ donc $H \neq \mathbb{R}_2[X]$. En particulier $\dim(H) < \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
Les polynômes $X - 2$ et $(X-2)^2$ appartiennent à H et forment une famille libre (degrés échelonnés) donc $\dim(H) \geqslant 2$.
On a donc $\dim(H) = 2 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - 1$: H est un hyperplan de E, et une base de H est

$(X-2,(X-2)^2)$.
2)$\Rightarrow$: supposons $H \oplus D = E$ avec D droite vectorielle. Alors

$$\dim(E) = \dim(H \oplus D) = \dim(H) + \dim(D) = \dim(H) + 1$$

donc $\dim(H) = \dim(E) - 1$.
$\Leftarrow$: Supposons $\dim(H) = \dim(E) - 1$ et soit D un supplémentaire de H dans E. On a $\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$ donc D est une droite vectorielle.
3) $H + F$ est un sous-espace de E contenant H. Or $\dim(H) = n-1$, donc $\dim(H+F) = n-1$ ou $\dim(H+F) = n$, donc $H+F = H$ ou $H+F = E$. Le premier cas $H+F = H$ se produit lorsque F est inclus dans H.
La formule de Grassmann peut s'écrire :

$$\dim(H \cap F) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F+H) \geqslant \dim(F) + (n-1) - n = \dim(F) - 1$$

(En passant on aura égalité si et seulement si F n'est pas inclus dans H)
4) Par récurrence sur p en utilisant la question précédente.

3 Rang d'une famille de vecteurs

§ 5. E est supposé de dimension finie n. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.

Définition 3.
★ Le *rang* de $\mathcal{E}$ est l'entier

$$\operatorname{rg}(\mathcal{E}) := \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{E})$$

Exemple 8. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (-3,-3)$, $e_3 = (1,0)$.
Nous avons $e_2 = -3e_1$ donc le sous-espace engendré par ces vecteurs est

$$Vect(e_1, e_2, e_3) = Vect(e_1, e_3)$$

Or la famille (e_1, e_3) est libre, donc est une base de ce sous-espace. Par conséquent

$$\operatorname{rg}(e_1, e_2, e_3) = \dim(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = 2$$

Proposition 13.
★ $\operatorname{rg}(\mathcal{E}) \leqslant \min(n,p)$
★ $\mathcal{E}$ est libre $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathcal{E}) = p$
★ $\mathcal{E}$ est génératice $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\mathcal{E}) = n$

démonstration :
(1) et (2) La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice dans $\operatorname{Vect}(\mathcal{E})$, donc $p \geqslant \operatorname{rg}(\mathcal{E})$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{E}$ est une base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{E})$, ie si et seulement si $\mathcal{E}$ est libre.
(1) et (3) : $\operatorname{Vect}(\mathcal{E})$ est un sous-espace de E, donc $\operatorname{rg}(\mathcal{E}) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $\operatorname{Vect}(\mathcal{E}) = E$, c'est-à-dire $\mathcal{E}$ génératrice.
Exercice 12. Déterminer le rang de la famille $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,2,1)$, $e_4 = (1,0,-1)$ de $\mathbb{R}^3$

réponse :
On peut observer les relations suivantes :

$$e_3 = e_1 + e_2 \text{ et } e_4 = e_1 - e_2$$

d'où

$$Vect(e_1, e_2, e_3, e_4) = Vect(e_1, e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2) = Vect(e_1, e_2)$$

De plus la famille (e_1, e_2) est libre. Donc (e_1, e_2) est une base de $Vect(e_1, e_2, e_3, e_4)$ et

$$\mathrm{rg}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 2$$

On observera que cette famille n'est ni libre, ni génératrice dans $\mathbb{R}^3$

§ 6. En pratique nous pourrons calculer le rang d'une famille de vecteur en utilisant une matrice (voir fin de ce chapitre)

4 Applications linéaires en dimension finie

§ 7. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 4.[rang]
■ Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
★ f est dite de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
★ Le cas échéant, on appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, noté $\mathrm{rg}(f)$.

Exemple 9.
— Si $f = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ donc f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) = 0$
— Si $f = \mathrm{Id}_E$ et si E est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.
— Soit p un projecteur de E, $p \neq \mathrm{Id}_E$. Le rang de p est strictement inférieur à $\dim(E)$.

Exercice 13. Quel est le rang de l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $f : P \mapsto P'$?
En utilisant la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ on obtient

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect(f(1), f(X), \cdots, f(X^n)) \\ &= Vect(0, 1, 2X, \cdots, nX^{n-1}) \\ &= Vect(1, X, \cdots, X^{n-1}) \\ &= \mathbb{K}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$

Proposition 14.
♦ On suppose E de dimension finie n, muni d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$.
■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$
★ f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

démonstration :
Il suffit d'utiliser la relation $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$

Proposition 15.
■ Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ linéaires de rang fini.
★ $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$
★ u est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$
★ u est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(u) = \dim(F)$
★ $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$
★ Si u est bijective alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$
★ Si v est bijective alors $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$

démonstration
(1),(2),(3) : Pour les trois premiers points, on applique les propriétés de la famille $\mathcal{E} = (u(e_1), \cdots, u(e_p))$: u est injective ssi $\mathcal{E}$ est libre , ie $\mathrm{rg}(\mathcal{E} = p = \dim(E)$. De même u est surjective ssi $\mathcal{E}$ est génératrice , ie $\mathrm{rg}(\mathcal{E} = n = \dim(F)$.
4) $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(v)$ donc $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$. De plus l'image par v d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ engendre $\mathrm{Im}(v \circ u)$, donc $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.
5) D'après (4), $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$. De plus

$$\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}((v \circ u) \circ u^{-1}) \leqslant \mathrm{rg}(v \circ u)$$

Donc $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.
6) idem
§ 8. Il existe un lien remarquable entre le noyau et l'image d'une application linéaire :

Théorème 16.[du rang]
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
★ f est de rang fini et
★ $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$

démonstration :
Soit A un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E et soit

$$g : \begin{cases} A \to Im(f) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

La fonction g est linéaire, montrons qu'elle est bijective :
-> Injectivité : Soit $x \in A$ tel que $g(x) = 0_F$. Alors $f(x) = 0_F$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap A = \{0_E\}$. Donc $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Donc g est injective.
-> Surjectivité : soit $y \in F$. Par définition de l'image de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $A + \mathrm{Ker}(f) = E$, donc on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors

$$g(a) = f(a) = f(x - b) = f(x) - f(b) = f(x) - 0_F = y$$

donc g est surjective.
g est un isomorphisme entre A et $\mathrm{Im}(f)$. En particulier ces deux espaces ont la même dimension :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(A) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Remarque. Il est donc possible de calculer le rang d'une application linéaire en cherchant la dimension de son noyau.
Exemple 10. Cherchons le rang de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, -2x + 3y, -x + 2y)$. Étudions le noyau de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$.
D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 - 0 = 2$$

Exercice 14. Déterminer le rang de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + y + 3z, x - 2y - z, x + 3y + 4z)$$

réponse :
Nous cherchons la dimension de $Ker(f)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

donc $Ker(f) = Vect((-1, -1, 1))$.
Le vecteur $(-1, -1, 1)$ forme une base de $Ker(f)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$$

Exercice 15. Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E (ie de dimension $p - 1$, où $p = \dim(E)$)
réponse :
L'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Or $\mathbb{K}$ est une droite vectorielle, donc $\mathrm{Im}(f)$ est égal à $\{0\}$ ou $\mathbb{K}$. Par ailleurs f est supposée non nulle, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}) = 1$.
D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - 1$$

donc $\mathrm{Ker}(f)$ est bien un hyperplan de E.
NB : on peut montrer la réciproque : tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle

Théorème 17.[endomorphismes bijectifs]
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soit u un endomorphisme de E.
★ Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est injectif
2. u est surjectif
3. u est bijectif
4. u est inversible à gauche : $\exists v \in \mathcal{L}(E)\ v \circ u = \mathrm{Id}_E$
5. u est inversible à droite : $\exists w \in \mathcal{L}(E)\ u \circ w = \mathrm{Id}_E$

Le cas échéant on a $v = w = u^{-1}$

démonstration :
$(3) \Leftrightarrow ((1) et (2))$: trivial
$(1) \Rightarrow (2)$: Supposons u injectif. Alors $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 0$. Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - 0 = \dim(E)$. Donc u est surjectif.
$(2) \Rightarrow (1)$: même démonstration

(4) $\Rightarrow$ (1) : Supposons $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$, $x = v \circ u(x) = v(0) = 0$. Donc u est injectif.
(5) $\Rightarrow$ (2) : Supposons $u \circ w = \mathrm{Id}_E$. Pour tout $x \in E$, $x = u(w(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc u est surjective.
(1) $\Rightarrow$ (4) : Supposons u injective. Alors u induit une bijection $\tilde{u}$ de E sur $\mathrm{Im}(u)$. Soit A un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u)$ dans E et soit $v : E \to E$ l'application linéaire définie par

$$v_{|A} = 0 \quad \text{et } v_{|\,\mathrm{Im}(u)} = \tilde{u}^{-1}$$

On a bien $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
(2) $\Rightarrow$ (5) : Supposons u surjective. Soit B un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. u étant surjective, elle induit une bijection $\tilde{u} : B \to E$. Il suffit alors de poser $w = \tilde{u}^{-1}$; on a bien $u \circ w = \mathrm{Id}_E$.

5 Matrice d'une famille de vecteurs

§ 9. Dans toute cette partie, E est de dimension finie p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E.
§ 10. Nous avons vu que tout vecteur $x \in E$ possède des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$; ce sont les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$$

Nous avons défini la matrice associée au vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ par :

$$M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

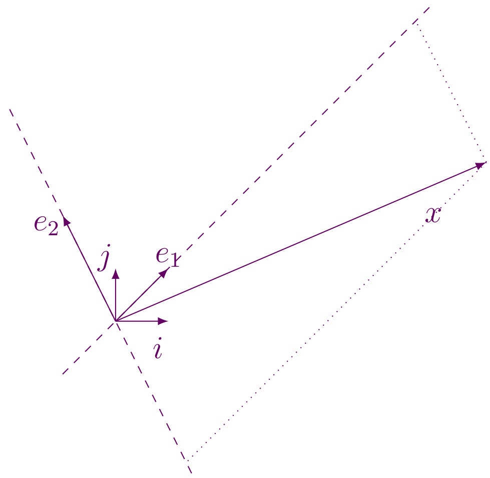
Exemple 11. Soit $P = 1 - 3\,\mathrm{X}^2 + 5\,\mathrm{X}^3$ et soit $B_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[\mathrm{X}]$. On a sans calcul :

$$M_{B_c}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Soit E un plan vectoriel muni d'une base $B = (i, j)$. Soit $B' = (e_1, e_2)$ où $e_1 = i + j$, $e_2 = -i + 2j$. Soit $x = 7i + 3j$

1. Montrer que B' est une base de E. Représenter tous les vecteurs sur un même dessin.
2. Déterminer la matrice de x dans chacune des bases B et B' de E.

réponse :
1) B' est une famille libre (vérification laissée en exercice) de deux vecteurs dans un espace de dimension 2, donc B' est une base de E. *Voici tous les vecteurs de l'exercice ; on a aussi représenté les projections de x sur* $\mathrm{Vect}(e_1)$ *et* $\mathrm{Vect}(e_2)$



2)

- On a sans calcul $M_B(x) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- On vérifie que $x = \frac{17}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2$. Donc $M_{B'}(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 17. Montrer que la famille

$$B = (\mathrm{X}^2, (\mathrm{X}-1)^2, (\mathrm{X}+1)^2).$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont les coordonnées des polynômes $1, X$ et X^2 dans B ?

réponse :

- On vérifie (exercice) que B est une famille libre de 3 vecteurs. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) = 3$ c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

- On a la relation $1 = -\mathrm{X}^2 + \frac{(\mathrm{X}-1)^2}{2} + \frac{(\mathrm{X}+1)^2}{2}$ donc

$$M_B(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-On trouve de même

$$M_B(X) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M_B(X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 18.

★ L'application

$$\begin{cases} E \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ x \mapsto M_{\mathcal{B}}(x) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

démonstration :

Appelons φ cette application. Nous avons déjà vu que φ est linéaire. De plus φ est bijective, de réciproque :

$$\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$$

Remarque. L'image par cet isomorphisme de la base $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

§ 11. On définit maintenant la matrice d'une famille de vecteurs dans une base sur le même modèle :

Définition 5.
■ Soit $(x_1,\ldots,x_q) \in E^q$ une famille (quelconque) de q vecteurs de E.
★ La matrice associée à cette famille dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_q)$, est la matrice à p lignes et q colonnes dont la j-ième colonne est $M_{\mathcal{B}}(x_j)$, pour tout $j \in [\![1,q]\!]$,.

Exemple 12. $M_B(e_1,\cdots,e_p) = I_p$.
Exemple 13. Soit $B_c = (1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et soient $P_1 = 5-2\,\mathrm{X}^3$, $P_2 = \mathrm{X}^3-3\,\mathrm{X}^2+2$, $P_3 = 4\,\mathrm{X}^3+7\,\mathrm{X}$. Alors

$$M_{B_c}(P_1,P_2,P_3) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Écrire la matrice de la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) dans la base $\mathcal{B} = (u,v)$ de $\mathbb{R}^2$, où :

$$\begin{array}{ll} u=(1,1) & v=(2,-1) \\ e_1=(1,0) & e_2=(1,2) \\ e_3=(0,1) & e_4=(4,1) \end{array}$$

réponse :
Nous avons les relations :

$$e_1 = \frac{1}{3}(u+v), \quad e_2 = v-u,$$
$$e_3 = \frac{1}{3}(2u-v), \quad e_4 = 2u+v$$

donc

$$M_{\mathcal{B}}(e_1,e_2,e_3,e_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

6 Matrice d'une application linéaire

§ 12. Dans toute cette partie, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1,\cdots,f_n)$ une base de F.
Enfin soit $u : E \to F$ une application linéaire. La définition suivante est essentielle pour la suite :

Définition 6.[matrice d'une application linéaire]
★ La matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, est la matrice de la famille $(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) := M_{\mathcal{B}'}(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_p))$$

★ Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ sera notée $M_{\mathcal{B}}(u)$ et dite matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$

Remarque. On observera que le nombre de lignes (resp. de colonnes) de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est égal à la dimension de l'espace d'arrivée (resp. de l'espace de départ) de u.
La matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée d'ordre p (où $p = \dim(E)$).
Remarque. En notant $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a donc les relations :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Exemple 14.
- L'application nulle est représentée par la matrice nulle dans n'importent quelles bases.
- Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_p$.

Exemple 15. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - y, x + y, 3x + 5y)$. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs bases canoniques B_c et B'_c.
- On a $u(1, 0) = (2, 1, 3)$ et $u(0, 1) = (-1, 1, 5)$
- donc

$$M_{B_c,B'_c}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple 16. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y, z) = (x - z, x + y + z, 3x + y - 2z)$. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B_c = (i, j, k)$
- On a $u(i) = (1, 1, 3) = i + j + 3k$, $u(j) = (0, 1, 1) = j + k$ et $u(k) = (-1, 1, -2) = -i + j - 2k$
- donc

$$M_{B_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. Soit $u \in L(\mathbb{R}^2)$ défini par $u(x, y) = (x - 2y, x + 3y)$. Écrire les matrices de u :
1. Dans la base canonique $B_c = (i, j)$
2. Dans la base $B = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (2, -1)$

réponse :
1) $u(i) = u(1, 0) = (1, 1) = i + j$ et $u(j) = u(0, 1) = (-2, 3) = -2i + 3j$. Donc

$$M_{B_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) La première colonne de $M_B(u)$ est constituée par les coordonnées de $u(e_1) = (-1, 4)$ *dans la base* B. Il s'agit donc de trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = (-1, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - \beta = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{3} \\ \beta = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

donc $u(e_1) = \frac{1}{3}(7e_1 - 5e_2)$. On trouve de même $u(e_2) = (4, -1) = \frac{1}{3}(2e_1 + 5e_2)$. Donc

$$M_B(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 20. Dans cet exercice $\dim(E) = n$; soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de G. On note $B = (e_1, \cdots, e_n)$ (on dit

que B est une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$)
Écrire la matrice dans B du projecteur p sur F parallèlement à G (resp. de la symétrie s par rapport à F, parallèlement à G)
réponse :
Par définition du projecteur sur F de direction G, on a les relations :

$$\begin{aligned} &\forall j \leqslant p \quad p(e_j) = e_j \\ &\forall j > p \quad p(e_j) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $M_B(p) = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & 0_{n-p} \end{pmatrix}$ (matrice diagonale avec 1 sur les p premières colonnes, 0 sur les colonnes suivantes)
Pour la symétrie on a de même $M_B(s) = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ (matrice diagonale avec 1 sur les p premières colonnes, -1 sur les colonnes suivantes)

Théorème 19.
■ Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
★ $\exists! u \in L(E,F) \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = A$

démonstration :
Notons $C_1, \cdots C_p$ les colonnes de A. Pour tout $j \leq p$ notons $a_j \in F$ l'unique vecteur tel que $C_j = M_{B'}(a_j)$ on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = A &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,p]\!] \quad M_{\mathcal{B}'}(u(e_j)) = C_j \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,p]\!] \quad M_{\mathcal{B}'}(u(e_j)) = M_{\mathcal{B}'}(a_j) \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,p]\!] \quad u(e_j) = a_j \end{aligned}$$

Il existe bien une unique application linéaire u ayant cette propriété.
Remarque. Autrement dit l'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{cases}$$

est bijective.
Exercice 21. On note B (resp. B') la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases B, B' est $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
réponse :
Notons $B = (e_1, e_2)$ et $B' = (i,j,k)$. La première (resp. seconde) colonne de A correspond aux coordonnées, dans la base B', du vecteur $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$). Autrement dit :

$$f(e_1) = -i + 2j + 4k \text{ et } f(e_2) = 5i + j + 7k$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x(-i + 2j + 4k) + y(5i + j + 7k) \\ &= (-x + 5y)i + (2x + y)j + (4x + 7y)k \\ &= (-x + 5y, 2x + y, 4x + 7y) \end{aligned}$$

§ 13. Nous allons maintenant voir que toutes les opérations usuelles sur les applications linéaires correspondent parfaitement à des opérations analogues sur les matrices

Théorème 20.[expression matricielle de l'image d'un vecteur par une AL]
■ Soit $x \in E$
★ Les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de $u(x)$ sont données par le produit matriciel :

$$M_{\mathcal{B}'}(u(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).M_{\mathcal{B}}(x)$$

démonstration :
Notons $A = M_{B,B'}(u)$. Définissons deux applications $E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ par $f : x \mapsto M_{\mathcal{B}'}(u(x))$ et $g : x \mapsto A.M_B(x)$. Ces fonctions f et g sont linéaires. Calculons l'image de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ par f et par g.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. La matrice

$$f(e_j) = M_{B'}(u(e_j))$$

est la j-ème colonne de A. Par ailleurs

$$g(e_j) = A.M_B(e_j) = A. \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

est aussi la j-ième colonne de A. Donc $\forall j \quad f(e_j) = g(e_j)$.
Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E et $f, g : E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont linéaires, on a bien $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$.
Remarque. Autrement dit, si on note A la matrice de u, X la matrice de x et Y la matrice de $u(x)$ dans les bases correspondantes, on a la relation

$$Y = A.X$$

Exemple 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B = (i, j)$ et soit $f \in L(E)$ tel que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Calculons $f(x)$ avec $x = 2i + j$:
La matrice de x dans B est $M_B(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
D'après le théorème précédent la matrice de $f(x)$ dans B est

$$M_B(f(x)) = M_B(f).M_B(x) = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $f(x) = 14i + 19j$

Théorème 21.
■ Soient $u, v : E \to F$ linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$
★ $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u + v) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$
★ $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda u) = \lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$

démonstration :
Il s'agit de prouver que $\phi : u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est une application linéaire de $L(E,F)$ vers $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On calcule :

$$\begin{aligned} M_{B,B'}(u+\lambda v) &= M_{B'}((u+\lambda v)(e_1),\cdots,(u+\lambda v)(e_p)) \\ &= M_{B'}(u(e_1),\cdots,u(e_p)) + \lambda M_{B'}(v(e_1),\cdots,v(e_p)) \\ &= M_{B,B'}(u) + \lambda M_{B,B'}(v) \end{aligned}$$

Donc ϕ est bien linéaire.
Remarque. Autrement dit l'addition et le produit externe des applications linéaires correspondent à l'addition et la multiplication externe des matrices.

Corollaire 22.
★ L'application

$$\phi : \begin{cases} L(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme
★ L'espace vectoriel $L(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(L(E,F)) = \dim(E).\dim(F)$
★ $\dim(L(E)) = (\dim(E))^2$

démonstration :
1) on a vu que ϕ est bijective et linéaire.
2) $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np. Or deux espaces isomorphes ont la même dimension. Donc $\dim(L(E,F)) = np$.

Théorème 23.
■ Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie q muni d'une base $\mathcal{B}'' = (g_1,\dots,g_q)$.
■ Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$
★ $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v).M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$

démonstration :
Notons $U = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$, $V = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)$ et $W = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u)$.
Nous allons montrer que pour toute matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $WX = VUX$.
Posons $X = M_B(x)$ avec $x \in E$. On a d'une part

$$WX = \mathrm{M}_{B,B''}(v \circ u).M_B(x) = M_{B''}(v \circ u(x))$$

et d'autre part

$$VUX = \mathrm{M}_{B',B''}(v).M_{B,B'}(u).M_B(x) = M_{B',B''}(v)M_{B'}(u(x)) = M_{B''}(v(u(x)))$$

On a donc bien $VUX = WX$ pour toute matrice-colonne X.
Avec $X = E_{j,1}$ (base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$), on voit donc que les matrices W et UV ont la même j-ième colonne, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. Donc $W = VU$.
§ 14. La formule se simplifie pour les endomorphismes :

Corollaire 24.
■ Soient u et v des endomorphismes de E et $k \in \mathbb{N}$
★ $M_{\mathcal{B}}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}}(v).M_{\mathcal{B}}(u)$
★ $M_{\mathcal{B}}(u^k) = (M_{\mathcal{B}}(u))^k$

Exercice 22. Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}_2[X]$, soient f et g les endomorphismes de E définis par $f : P \mapsto P + (X+1)P'$ et $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice $M_B(f)$
2. Calculer la matrice de $f \circ g$ dans la base B ; l'utiliser pour calculer $(f \circ g)(1 + X^2)$

réponse :

1) On calcule $f(1) = 1$, $f(X) = 1 + 2X$ et $f(X^2) = 2X + 3X^2$ donc $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) $M_B(f \circ g) = M_B(f).M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Les coordonnées dans B de $(f \circ g)(1 + X^2)$ sont données par

$$M_B((f \circ g)(1 + X^2)) = M_B(f \circ g).M_B(1 + X^2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $(f \circ g)(1 + X^2) = 5 + 6X$

Corollaire 25.

■ Soit $u : E \to F$ linéaire.

★ u est bijective si et seulement si $n = p$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible

★ Le cas échéant, si $E = F$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ alors $M_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$

démonstration :

Toute bijection linéaire doit conserver la dimension, on se limite donc à $n = p$.
Si u est bijective, alors $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F$, donc $M_{\mathcal{B}'}(u \circ u^{-1}) = I_n$, donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}) = I_n$$

de même à partir de $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$ on obtient

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}).M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = I_n$$

donc $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible, d'inverse $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1})$.
Inversement si $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible d'inverse A : soit $v : F \to E$ linéaire telle que $A = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v)$; alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont pour matrice I_n, donc u est bijective et $v = u^{-1}$.

Théorème 26.

■ Soit $u : E \to F$ linéaire et $r \in \mathbb{N}$.

★ Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{rg}(u) = r$
2. Il existe des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F telles que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

démonstration :
(1) $\Rightarrow$ (2) :Supposons $\mathrm{rg}(u) = r$, ie $\dim(\mathrm{Im}(u)) = r$. Soit $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. On la complète en une base $B' = (f_1, \cdots, f_n)$ de F.
Soient $e_1, \cdots, e_r$ des antécédents de $f_1, \cdots f_r$ par u. On a vu (voir théorème du rang) que

$$Vect(e_1, \cdots, e_r) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$$

On pose alors $(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$: $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.
Par construction on a

$$\begin{aligned} \forall j \leqslant r \quad & u(e_j) = f_j \\ \forall j > r \quad & u(e_j) = 0 \end{aligned}$$

Donc $M_{B,B'}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) :
Supposons (2) vraie, et notons $B = (e_1, \cdots, e_p)$ et $B' = (f_1, \cdots, f_n)$. L'image de u est

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_p)) = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_r, 0, \cdots, 0)$$

Donc $(f_1, \cdots, f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Donc $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = r$.

7 Application canoniquement associée à une matrice

§ 15. Dans cette partie nous effectuons l'opération inverse de la précédente : étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit une application linéaire qui lui correspond "naturellement" :

Définition 7.[AL associée à une matrice]
★ L'application linéaire canoniquement associée à A est définie par :

$$u_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto A.X \end{cases}$$

Notation. Dans ce cours nous notons u_A cette application linéaire (ce n'est pas une notation officielle)

Exemple 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. C'est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. L'application canoniquement associée est $u_A : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$u_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z \\ 2x + 7y + 9z \end{pmatrix}$$

Exercice 23. Écrire l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse :
u_A est l'application $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$u_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ -x + 3y + z \\ y + 5z \\ 3x + 9y + z \end{pmatrix}$$

Proposition 27.
■ Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
★ $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u_A)$

démonstration :
En notant $E_1, \cdots E_p$ la base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$, $A.E_1, \cdots A.E_p$ sont les colonnes de A ; leurs coordonnées dans la base canonique B' sont donc les coefficients de A

Remarque. En "identifiant" $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^p$ on peut voir u_A comme une application linéaire $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$; A est alors la matrice de u_A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$

Remarque. Étant données deux matrices A, B et $\lambda \in \mathbb{K}$, on vérifie facilement (sous réserve que les opérations matricielles soient possibles), directement ou en utilisant les formules de la partie précédente avec les bases canoniques :
- $u_{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$
- $u_0 = 0$
- $u_A = u_B \Leftrightarrow A = B$
- $u_{A+\lambda B} = u_A + \lambda u_B$
- $u_{AB} = u_A \circ u_B$
- $\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{A^k} = (u_A)^k$
- Si A est inversible, u_A est bijective et $(u_A)^{-1} = u_{A^{-1}}$.

§ 16. Le vocabulaire et les propriétés des applications linéaires peuvent désormais s'appliquer aux matrices :

Définition 8.[noyau, image,rang d'une matrice]
★ Le noyau (resp. l'image) (resp. le rang) de A est défini comme le noyau (resp. l'image) (resp. le rang) de l'application linéaire canoniquement associée u_A.

Notation. On les note respectivement $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 28.[définition équivalente]
■ Soit $(C_1, \dots, C_p)$ la famille des colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
★ $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad / \quad AX = 0_{n,1} \right\}$
★ $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{C_1, \dots, C_p\}$
★ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$

démonstration :
1) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(u_A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad / \quad u_A(X) = 0_{n,1} \right\}$
2) Soit $(E_1, \cdots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(u_A) &= \mathrm{Vect}(u_A(E_1), \cdots, u_A(E_p)) \\ &= \mathrm{Vect}(AE_1, \cdots, AE_p) \\ &= \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_p) \end{aligned}$$

3) $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_p)) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p)$

Remarque. Une colonne $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A si et seulement si

$$\alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_p C_p = 0$$

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On observe que les colonnes de cette matrice sont liées par $C_3 = C_1 + C_2$.

On en déduit immédiatement que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$

§ 17. Cette définition du rang est cohérente avec celle donnée dans un précédent chapitre (via des opérations élémentaires) en vertu du théorème suivant :

Théorème 29.[rang et opérations élémentaires]
★ On ne change pas le rang de A en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible
★ On ne change pas le rang de A en appliquant une opération élémentaire (dilatation, transvection, permutation) sur les lignes ou les colonnes de A.
★ Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots

démonstration rapide :
1) C'est une propriété des applications linéaires (la composition à gauche ou à droite par un isomorphisme ne change pas le rang d'une AL)
2) À toute opération élémentaire est associée une matrice inversible M (de dilatation, transvection ou permutation). Effectuer une opération élémentaire sur A revient à multiplier A par M à gauche ou à droite. On applique alors le premier point.
3)Quitte à effectuer des opérations élémentaires et à permuter quelques colonnes, on se ramène au calcul du rang de $A = \begin{pmatrix} I_r & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r est le nombre de pivots de A. Or les colonnes $C_1, \cdots C_r$ de cette matrice forment une famille libre, et les colonnes suivantes $C_{r+1}, \cdots C_p$ sont combinaisons linéaires de $(C_1, \cdots, C_r)$. Donc $\mathrm{rg}(A) = r$.

Remarque. En pratique la méthode du pivot de Gauss est un moyen efficace de déterminer le rang d'une matrice : il suffit d'échelonner la matrice et de compter le nombre de pivots obtenus.

Remarque. Soit $u : E \to F$ linéaire. Le rang de u est égal au rang de la matrice $M_{B,B'}(u)$, quelles que soient les bases B et B' respectivement de E et de F.
De même, le rang d'une famille de vecteur de E est égal au rang de la matrice associée dans une base quelconque de E.

Exercice 24.

1. Trouver le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$:
$$\mathcal{E} = (X^2 + 2, X^2 - X - 1, X^2 + X + 5, X^2 - X - 1)$$
Est-elle libre ou génératrice ?
2. Quel est le rang de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P' - P''$? Préciser si u est injectif ou surjectif.

réponse :
1) La matrice de la famille $\mathcal{E}$ dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous déterminons son rang par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} A &\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftrightarrow 3L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice ainsi obtenue est échelonnée de rang 2 : $\text{rg}(\mathcal{E}) = 2$
La famille $\mathcal{E}$ n'est pas libre (le rang est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille) et n'est pas génératrice (le rang est strictement inférieur à $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$)
2) On calcule $u(1) = 0$, $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X - 2$ donc la matrice de u dans la base canonique est

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est échelonnée de rang 2, donc $\text{rg}(u) = 2$.
Le rang de l'endomorphisme u est strictement inférieur à $\dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc u n'est ni injectif, ni surjectif.
Remarque. Le rang de A est égal à r si et seulement si on peut donc trouver P, Q inversibles telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Théorème 30.
★ $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$, où A^T est la matrice transposée de A.

démonstration :
Soit $r = \text{rg}(A)$. On peut donc trouver P, Q inversibles telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Transposons cette relation, nous obtenons

$$Q^T A^T P^T = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$$

La matrice ainsi obtenue est de rang r, donc $\text{rg}(A^T) = r$.

Théorème 31.[théorème du rang matriciel]
★ $p = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$, où p est le nombre de colonnes de A.

démonstration :
C'est le théorème du rang appliqué à u_A.

Exemple 20. Déterminons le noyau et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soient C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

-La relation $C_3 = C_1 + C_2$ montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{rg}(A) \leqslant 2$

-Les colonnes C_1 et C_2 sont clairement indépendantes, donc $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$

Par conséquent $\operatorname{rg}(A) = 2$ et (théorème du rang) $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 3 - \operatorname{rg}(A) = 1$

-On a donc finalement $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$

Exercice 25. Trouver la dimension du noyau et déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

réponse :

Soient x, y, z réels,

$$A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

donc $Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \quad / \quad z \in \mathbb{R} \right\} = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, donc $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$.

D'après le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(A) = 3 - \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 2$$

Corollaire 32.[solutions d'un système linéaire]

■ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

★ L'ensemble S_H des solutions du système homogène $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ de dimension $p - r$

★ L'ensemble S des solutions du système $AX = B$ est soit vide, soit de la forme

$$S = \left\{ X_0 + X \quad / \quad X \in S_H \right\}$$

où X_0 est une solution particulière de $AX = B$.

démonstration :

Il suffit de voir que $S_H = \operatorname{Ker}(A)$ et d'appliquer le théorème du rang matriciel.

Remarque.

- L'ensemble S n'est pas un sous-espace vectoriel lorsque $B \neq 0$
- Lorsque $\mathrm{rg}(A) < p$, le système « $AX = B$ » a zéro ou une infinité de solutions.
- Lorsque $\mathrm{rg}(A) = p$, le système « $AX = B$ » a au plus une solution.

Théorème 33.[caractérisations des matrices inversibles]
★ Toute matrice inversible est une matrice carrée
♦ On suppose $n = p$. Soient $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A.
★ Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible
2. A est inversible à gauche
3. A est inversible à droite
4. $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$
5. $\mathrm{rg}(A) = n$
6. $(C_1, \dots, C_n)$ est libre
7. $(C_1, \dots, C_n)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$
8. $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$

démonstration rapide :
A est inversible à gauche (resp à droite) (resp des deux côtés) si et seulement si u_A est injective (resp. surjective) (resp. bijective).
Ce théorème est donc la conséquence de toutes les propriétés des applications linéaires vues précédemment.

Exercice 26. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible en étudiant son noyau.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. X appartient au noyau de A si et seulement si

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$: A est bien inversible.

8 Changements de bases

§ 18. Nous avons associé des matrices aux vecteurs, familles de vecteurs et applications linéaires en dimension finie.
Toutefois ces matrices dépendent des bases choisies. On peut se demander comment ces matrices se comportent lorsque l'on change les bases des espaces vectoriels.
§ 19. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective p et n.
Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ des bases de E ; Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ des bases de F ;

Définition 9.[matrices de passage]
★ La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notée $\mathcal{P}_{B,B'}$, est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\mathcal{P}_{B,B'} := M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Remarque. On a de manière équivalente

$$\mathcal{P}_{B,B'} := M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Exemple 21. Dans $\mathbb{R}^3$ soit B la base canonique et $B' = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 1, 7)$, $e_2 = (-2, 0, 6)$ et $e_3 = (-1, 3, 0)$.
On vérifie que B' est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de B vers B' est

$$\mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 27. Dans $E = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, soit $B = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ la base canonique et soit

$$B' = (1, \mathrm{X}-1, 2\,\mathrm{X}^2 - 3\,\mathrm{X} + 1, -\mathrm{X}^3 + 2\,\mathrm{X})$$

1. Montrer que B' est une base de E
2. Écrire la matrice de passage de B vers B'

réponse :
1) B' est échelonnée en degrés donc libre. De plus c'est une famille de 4 vecteurs avec $\dim(E) = 4$, donc B' est une base de E.
2) $\mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Proposition 34.
★ $\mathcal{P}_{B,B} = I_p$
★ $\mathcal{P}_{B,B'}.\mathcal{P}_{B',B''} = \mathcal{P}_{B,B''}$
★ $\mathcal{P}_{B,B'}$ est inversible, et $(\mathcal{P}_{B,B'})^{-1} = \mathcal{P}_{B',B}$
★ Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ inversible d'ordre p, il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$

démonstration :
1) $\mathcal{P}_{B,B} = \mathrm{M}_{B,B}(\mathrm{Id}_E) = I_p$
2) $\mathcal{P}_{B,B'}.\mathcal{P}_{B',B''} = \mathrm{M}_{B',B}(\mathrm{Id}_E).\,\mathrm{M}_{B'',B'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{M}_{B'',B}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathcal{P}_{B,B''}$
3) $\mathcal{P}_{B,B'}.\mathcal{P}_{B',B} = \mathcal{P}_{B,B} = I_p$ d'après ce qui précède, donc $\mathcal{P}_{B,B'}$ et $\mathcal{P}_{B',B}$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{M}_B(u) = A$. Notons $B = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{E} = (u(e_1), \cdots, u(e_p))$.
Comme u est bijective, $\mathcal{E}$ est une base de E. Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a aussi

$$A = M_B(u) = M_B(u(e_1), \cdots, u(e_p)) = \mathcal{P}_{B,\mathcal{E}}.$$

Exercice 28. Soit $B = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $B' = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (2, 3, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Écrire la matrice de passage P de B vers B'
2. Exprimer b_1, b_2 et b_3 en fonction de e_1, e_2, e_3. En déduire la matrice de passage Q de B' vers B
3. Vérifier que P et Q sont inverses l'une de l'autre.

réponse :

1) On vérifie facilement que B' est une base de $\mathbb{R}^3$. On a sans calcul $P = \mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) On trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = e_1 \\ 2b_1 + 3b_2 = e_2 \\ b_3 = e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_1 = 3e_1 - e_2 \\ b_2 = -2e_1 + e_2 \\ b_3 = e_3 \end{cases}$$

donc $Q = P_{B',B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3)On voit après calcul que $P.Q = I_3$, donc $Q = P^{-1}$.

§ 20. Nous sommes maintenant en mesure de comparer les matrices d'un vecteur ou d'une application linéaire dans des bases différentes :

Théorème 35.[changement de base pour un vecteur]

■ Soit $x \in E$.

★ Les coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par :

$$M_{\mathcal{B}'}(x) = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.M_{\mathcal{B}}(x)$$

démonstration :

On calcule :

$$\mathcal{P}^{-1}_{B,B'}.M_B(x) = M_{B,B'}(\mathrm{Id}_E).M_B(x) = M_{B'}(\mathrm{Id}_E(x)) = M_{B'}(x)$$

Remarque. Si on note X (resp. X' la matrice de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors on a la relation

$$X' = P^{-1}.X$$

Attention, il s'agit bien de l'inverse de P dans cette formule !

Exemple 22. Dans $\mathbb{R}^2$ on appelle B la base canonique et $B' = (e_1 = (2,3), e_2 = (-1,1))$. Soit $a = (3,5)$, déterminons les coordonnées de a dans les bases B et B'.

- Sans calcul, $M_B(a) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Pour trouver $M_{B'}(a)$, nous utilisons la matrice de passage $P = \mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc

$$M_{B'}(a) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 29. Dans $\mathbb{R}^3$ soient $B = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique et soit $B' = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,0,1)$, $e_3 = (3,0,0)$.

1. Écrire les matrices de passages de B vers B' puis de B' vers B
2. Quelles sont les coordonnées dans B' d'un vecteur $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$?

réponse :
1) On a les relations évidentes :

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = e_1 \\ -b_1 + b_3 = e_2 \\ 3b_3 = e_3 \end{cases}$$

dont on déduit facilement :

$$\begin{cases} b_1 = -e_2 + \frac{1}{3}e_3 \\ b_2 = e_1 + 2e_2 - \frac{2}{3}e_3 \\ b_3 = \frac{1}{3}.e_3 \end{cases}$$

Par conséquent B' est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a les matrices de passage :

$$\mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{P}_{B',B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Les coordonnées de a dans la base B' sont données par :

$$\begin{aligned} M_B(a) &= \mathcal{P}_{B',B}.M_B(a) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3y \\ -3x + 6y \\ x - 2y + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 36.[changement de base pour une application linéaire]
■ Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
★ Les matrices de u relativement aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ d'une part, et $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ d'autre part, sont liées par :

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}.M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

★ Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$) :

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}.M_{\mathcal{B}}(u).\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

démonstration :
On calcule :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{C,C'}^{-1}.\,\mathrm{M}_{B,C}(u).\mathcal{P}_{B,B'} &= \mathrm{M}_{C,C'}(\mathrm{Id}_F).\,\mathrm{M}_{B,C}(u).\,\mathrm{M}_{B',B}(\mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{M}_{C,C'}(\mathrm{Id}_F).\,\mathrm{M}_{B',C}(u \circ \mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{M}_{B',C'}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{M}_{B',C'}(u) \end{aligned}$$

Remarque. Nous utiliserons essentiellement cette formule avec des endomorphismes.
Si on note A (resp. A') la matrice d'un endomorphisme u dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors la relation de changement de base s'écrit

$$A' = P^{-1}AP$$

Exercice 30. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$u(x, y, z) = (x + y - z, x + z, 2x - 3y)$$

Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e_1, e_2, e_3)$, où

$$e_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (1, 0, -1), \quad e_3 = (0, 1, 0)$$

1. Écrire la matrice de u dans la base B
2. Déterminer les matrices de passage entre B et B'
3. En déduire la matrice de u dans la base B'

réponse :
1) On calcule $u(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$, $u(0, 1, 0) = (1, 0, -3)$ et $u(0, 0, 1) = (-1, 1, 0)$ donc

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) D'abord

$$P = \mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et après calcul de l'inverse de cette matrice :

$$\mathcal{P}_{B',B} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base appliquée à u s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{B'}(u) &= P^{-1}\,\mathrm{M}_B(u)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 31. On note B la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = (e_1, e_2)$, où $e_1 = (3, 1)$ et $e_2 = (2, 1)$. Soit $p \in L(\mathbb{R}^2)$ le projecteur sur $Vect(e_1)$ parallèlement à $Vect(e_2)$

1. Trouver sans calcul la matrice de p dans la base B'
2. En déduire la matrice de p dans la base canonique B

réponse :

1) Par définition d'un projecteur, on a les relations $p(e_1) = e_1$ et $p(e_2) = 0$. Donc $M_{B'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Les matrices de passage entre B et B' sont :

$$\mathcal{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{P}_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} M_B(p) &= \mathcal{P}_{B,B'} M_{B'}(p) \mathcal{P}_{B',B} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$