Chapitre 15 - Probabilités finies

Table des matières

§ 1. L'objectif est de modéliser rigoureusement une *expérience aléatoire*, c'est-à-dire une expérience pour laquelle plusieurs issues sont possibles.
En particulier il s'agit de mesurer les "chances" qu'une issue, ou plus généralement un événement, puisse se réaliser.
On se limite cette année aux expériences qui ont un nombre fini d'issues possibles.

1 Univers et événements

§ 2. Nous considérons une expérience aléatoire $(\mathcal{E})$. Voici quelques exemples courants dans les exercices :
- Lancer un ou plusieurs dés
- Effectuer des tirages simultanés ou successifs dans une urne
- Tirer un nombre fini de fois à pile ou face

Définition 1.[univers]
★ L'ensemble des issues de l'expérience aléatoire $(\mathcal{E})$ est appelé *univers*, noté Ω dans ce cours.

Exemple 1.
1. Pour l'expérience consistant à lancer un dé ordinaire (ie avec 6 faces numérotées de 1 à 6), $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. On tire 5 fois de suite à pile ou face. Pour cette expérience, $\Omega = \{pile, face\}^5$. $(pile, pile, face, face, pile)$ est une des issues de l'expérience.
3. On tire successivement et sans remise trois boules dans une urne contenant 10 boules (disons numérotées de 1 à 10). Dans ce cas Ω est l'ensemble des triplets d'entiers 2 à 2 distincts de $[\![1, 10]\!]$. Ainsi $(2, 9, 7)$ est une des issues de l'expérience.
4. Ω peut être un singleton (ie réduit à un élément), ce qui signifie que l'expérience $\mathcal{E}$ n'est pas vraiment aléatoire !
5. Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ à deux issues « succès »et « échec ». Pour une telle expérience, $card(\Omega) = 2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un *schéma de Bernoulli* est l'expérience qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli, dans des conditions indépendantes. Pour un tel schéma, $\Omega = \{succès, échec\}^n$

§ 3. Dans la suite de ce cours, l'univers Ω est supposé fini (non vide !). Nous noterons souvent

$$\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$

où $N = card(\Omega)$ est le nombre d'issues de l'expérience et $x_1, \cdots, x_N$ sont les différentes issues de l'expérience.
Remarque. Attention à ne pas confondre l'univers Ω, qui est un ensemble souvent assez complexe, et son cardinal $card(\Omega)$ (qui est un entier naturel mais contient peu d'information sur l'expérience aléatoire...)
§ 4. En pratique, nous étudierons des énoncés, vrais ou faux selon le résultat de l'expérience $\mathcal{E}$.
Par exemple pour le lancer d'un dé, l'énoncé « le nombre obtenu est pair » est vrai pour les issues $2, 4, 6$ et faux pour les issues $1, 3, 5$.
En théorie des probabilités, nous identifions cet énoncé et l'ensemble $\{2, 4, 6\}$:

Définition 2.[événements]
★ Les parties de Ω sont appelées *événements*
★ $\varnothing$ est appelé événement *impossible*, Ω est appelé événement *certain.*
★ Pour toute issue $x \in \Omega$, le singleton $\{x\}$ est appelé un *événement élémentaire.*
★ Soit A un événement. Les éléments de A sont appelés *issues favorables* à A.
★ Des événements A, B disjoints sont dits *incompatibles.*
★ Le complémentaire $\Omega \setminus A$ d'un événement A est appelé le *contraire* de A. On le note $\overline{A}$.

Remarque.
— Si A, B sont des événements, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont aussi des événements, que nous appellerons aussi respectivement (A et B) et (A ou B)
— L'ensemble des événements associés à l'expérience est $\mathcal{P}(\Omega)$. Le nombre total d'événements est donc 2^N, ce qui est très supérieur aux nombre N d'issues de l'expérience...

Exemple 2. On lance un dé
— L'univers associé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
— Nous définissons des événements $A =$« obtenir un nombre pair » $B =$« obtenir 1 ou 3 »et $C =$ « obtenir au moins 5 »
— Nous avons $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{5, 6\}$
— A et B sont incompatibles. B et C aussi
— $A \cap C = \{6\}$ est un événement élémentaire ; A et C ne sont pas incompatibles.
— Le contraire de A est $\overline{A} =$ « obtenir un nombre impair » $= \{1, 3, 5\}$.

Exemple 3.
— Pour tout événement A, A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
— L'événement $\varnothing$ est incompatible avec tout autre événement.

Exercice 1. On effectue 3 tirages successifs avec remise dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. Une issue de l'expérience est par exemple $(2, 2, 1)$

1. Quel est l'univers Ω de cette expérience ? Quel est son cardinal ?
2. On considère les événements $A =$ « obtenir la boule numéro 1 au premier tirage » $B =$ « obtenir la boule numéro 1 au deuxième tirage » et $C =$ « toutes les boules tirées ont le même numéro ». Décrire tous ces événements en extension (ie en donnant la liste de leurs éléments),
3. Décrire en extension les événements $A \cap \overline{B}$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$

réponse :
1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^3$ et $card(\Omega) = 4^3$.
2) $A = \left\{ \ (1, i, j) \quad / \quad (i, j) \in [\![1, 4]\!]^2 \ \right\} = \{1\} \times [\![1, 4]\!]^2$
$B = [\![1, 4]\!] \times \{1\} \times [\![1, 4]\!]$
$C = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4)\}$
3) $A \cap \overline{B} = \{1\} \times [\![2, 4]\!] \times [\![1, 4]\!]$
$A \cap B \cap C = \{(1, 1, 1)\}$
$(A \cup B) \cap C = \{(1, 1, 1)\}$

□

Définition 3.[système complet d'événements]
★ Un *système complet d'événements* est une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Exemple 4.

— Soit $A \subset \Omega$. Alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

— La famille $(\{x_i\})_{i \in [\![1,N]\!]}$ des événements élémentaires est un système complet d'événements.

Exercice 2. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3.
On tire à pile ou face. Si on obtient pile, on choisit une boule dans l'urne. Si on obtient face, on tire simultanément 2 boules dans l'urne

1. Quel est l'univers Ω associé à cette expérience ?
2. Décrire en extension les événements $A =$ « La pièce tombe sur pile »et $B =$« l'une des boules tirées porte le numéro 3 »
3. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ on note E_i l'evenement« la somme des numéros obtenus est égale à i ». Montrer que $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$ est un système complet d'evenements.

réponse :
1) Notons $E = \{1, 2, 3\}$ (qui représente l'ensemble des boules de l'urne) et F l'ensemble des 2-combinaisons de E, ie l'ensemble des parties de E à deux éléments. Avec ces notations, $\Omega = \{pile\} \times E \cup \{face\} \times F$
2) $A = \{pile\} \times E = \{(pile, 1), (pile, 2), (pile, 3)\}$
$B = \{(pile, 3), (face, \{1, 3\}), (face, \{2, 3\})\}$
3) La somme des numéros à l'issue de l'expérience est toujours un entier compris entre 1 et 5, donc $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \Omega$
Il reste à montrer que ces événements sont deux à deux incompatibles. Soient $i \neq j$. La somme des numéros obtenus à l'issue de l'expérience ne peut pas être égale à la fois à i et à j. Donc $E_i \cap E_j = \varnothing$.

□

Proposition 1.
■ Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet d'événements, et soit B un événement quelconque.
★ Les événements $A_1 \cap B, \cdots, A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles
★ $B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$

démonstration :
-Soient $i \neq j$. On calcule

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$$

$A_i \cap B$ et $A_j \cap B$ sont incompatibles.
-$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \Omega \cap B = B$

□

2 Mesure de probabilité

§ 5. Soit Ω un ensemble fini non vide, univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Nous souhaitons attribuer, à tout événement A, un nombre $\mathbb{P}(A)$ (appelé probabilité de A) qui va mesurer les chances que A se réalise.
Il s'agit donc de définir et d'utiliser une fonction

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Deux problèmes se posent alors :

1. La fonction $\mathbb{P}$ doit-elle satisfaire des règles particulières ?
2. Comment définir précisément $\mathbb{P}$ pour une expérience aléatoire donnée ?

§ 6. La réponse à la première question est affirmative, voici les règles qui ont été retenues :

Définition 4.[mesure de probabilité]
★ Une mesure de probabilité, ou une probabilité, sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui vérifie toutes les conditions ci-dessous :
— $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(A) \geqslant 0$
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
— $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 \quad (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
★ Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé un espace probabilisé fini.

Remarque. Pour un univers Ω tel que $card(\Omega) \geqslant 2$, nous verrons qu'il existe une infinité de telles mesures de probabilités sur Ω. En pratique, on devra choisir $\mathbb{P}$ selon l'information dont on dispose sur l'expérience aléatoire...
Voici un exemple (à connaître absolument !) que nous utiliserons souvent (mais pas toujours...)
Exercice 3. Montrer que l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle *probabilité uniforme* sur Ω.
réponse :
-Pour toute partie A de Ω, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \geqslant 0$
-$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(\Omega)} = 1$
-Soient A, B des parties de Ω telles que $A \cap B = \varnothing$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{card(A \cup B)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{card(A) + card(B)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} + \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

La fonction $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω.

□

Exemple 5. En pratique, cette probabilité est choisie lorsque toutes les issues de l'expérience ont les mêmes chances de se réaliser. Par exemple :
— Lancer d'un dé *non truqué* ou *équilibré*
— Tirage à pile ou face avec une pièce *non truqué*
— Tirage(s) dans une urne contenant n boules *indiscernables*

Exercice 4. On lance un dé truqué : une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 5 et les autres faces portent le numéro 6.

1. Quel est l'univers associé à cette expérience ?
2. Proposer un choix cohérent de probabilité pour chacun des événements élémentaires de cet univers.

réponse :
1) $\Omega = \{1, 5, 6\}$
2) Intuitivement, la probabilité d'obtenir 5 (rep. 6) vaut 2 fois (resp. 3 fois) la probabilité d'obtenir 1 : cela se traduit par

$$\mathbb{P}(\{5\} = 2.\,\mathbb{P}(\{1\}) \text{ et } \mathbb{P}(\{6\} = 3.\,\mathbb{P}(\{1\})$$

De plus on doit avoir

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Le seul choix possible est donc

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6} \quad \mathbb{P}(\{5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

□

§ 7. Dans toute la suite du cours on se donne un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Définition 5.
■ Soient A, B des événements.
★ A est dit négligeable lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$
★ A est dit presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$
★ A et B sont dits équiprobables lorsque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

Proposition 2.
■ Soient A et B des événements.
★ $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
★ $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
★ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
★ $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
★ $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$
★ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

démonstration :
- $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, donc

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing)$$

donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Les événements $A \cap B$ et $B \setminus A$ sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

donc $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Appliquons cette relation avec $B = \Omega$, on obtient

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega \cap A) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

- Si $A \subset B$, alors $A = A \cap B$, donc

$$\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$$

- En particulier, puisque $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Les événements A et $B \setminus A$ sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

□

Corollaire 3.

■ Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ une famille finie d'événements.

★ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

★ avec égalité lorsque $A_1, \cdots, A_n$ sont deux à deux incompatibles.

★ Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

démonstration :

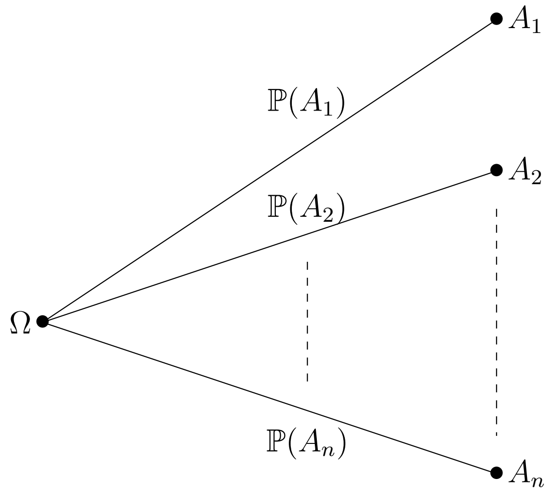
-Les deux premiers points se montrent par récurrence sur n. -Supposons $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements. D'abord $\Omega = \bigcup_i A_i$ donc

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_i A_i)$$

De plus $(A_1, \cdots, A_n)$ sont deux à deux incompatible donc $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

□

§ 8. Un système complet d'événement $(A_1, \cdots, A_n)$ de $(\Omega, \mathbb{P})$ pourra être représenté par un arbre pondéré :



$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = 1$$

Exercice 5. On tire simultanément trois boules dans une urne qui contient 4 boules blanches et 3 boule noire. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ on note $B_k =$« obtenir exactement k boules blanches ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_k)$ pour tout k
2. En déduire les probabilités des événements :
   (a) $A =$ « Obtenir au moins une boule blanche »
   (b) $C =$ « Obtenir au moins une boule noire »
   (c) $D =$ « Le nombre de boules blanches obtenues est pair »

(d) $E =$« Tirer au moins une boule de chaque couleur »

réponse :
1) Le tirage est simultané, donc Ω est l'ensemble des 3-combinaisons de l'urne, muni de la probabilité uniforme. En passant $card(\Omega) = \binom{7}{3} = 35$.
Pour $k \leqslant 3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_k) &= \frac{card(B_k)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{4}{k}\binom{3}{3-k}}{35}\end{aligned}$$

On trouve :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(B_k)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

□

2.1) $A = \overline{B_0}$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B_0) = \frac{34}{35}$
2.2) $C = \overline{B_3}$ donc $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(B_3) = \frac{31}{35}$
2.3) $D = B_0 \cup B_2$ donc $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_0 \cap B_2) = \frac{19}{35}$
2.4) $E = A \cap C = \overline{B_0} \cap \overline{B_3} = \overline{B_0 \cup B_3}$, donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(B_0 \cup B_3) = 1 - (\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_3) - \mathbb{P}(B_0 \cap B_3)) = \frac{6}{7}$$

□

§ 9. Il reste le problème de la définition une mesure de probabilité adaptée à une expérience aléatoire. Commençons par le cas le plus simple :

Proposition 4.
★ $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω si et seulement si les événements élémentaires sont deux à deux équiprobables
★ Le cas échéant, $\forall x \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{card(\Omega)}$

démonstration :
Supposons $\mathbb{P}$ uniforme, autrement dit $\forall A \quad \mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$. Pour $A = \{x\}$ evenement élémentaire, on a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{card(\Omega)}$. Les evenements élémentaires ont tous la même probabilité, ils sont équiprobables.
Réciproquement, supposons les evenements élémentaires tous équiprobables. Notons $\Omega = \{x_1, \cdots, x_N\}$. Il existe donc une constante $\alpha \geqslant 0$ telle que

$$\forall i \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(\{x_i\}) = \alpha$$

Soit $A \subset \Omega$, $A = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ avec $p = card(A)$. Nous avons $A = \bigcup_{j=1}^{p} \{x_{i_j}\}$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\{x_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{p} \alpha = p\alpha = card(A)\alpha$$

en particulier pour $A = \Omega$, $1 = card(\Omega)\alpha$ donc $\alpha = \frac{1}{card(\Omega)}$. Finalement $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

□

Exercice 6. Une urne contient 2 boules vertes (numérotées de 1 à 2) et 4 boules rouges (numérotées de 3 à 6).
On effectue 5 tirages dans cette urne, et on s'intéresse à l'événement $A =$« obtenir en tout 2 boules vertes et 3 boules rouges ».
Proposer un modèle pour cette expérience et calculer $\mathbb{P}(A)$ dans chacun des cas suivants :

1. le tirage est successif avec remise
2. le tirage est successif sans remise
3. le tirage est simultané

Réponse :
1)tirage successif avec remise : on choisit le modèle $\Omega = [\![1,6]\!]^5$ muni de la probabilité uniforme, d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{6^5}$.
Il reste à compter le nombres de 5-listes de $[\![1,6]\!]$ contenant exactement 2 boules vertes. Pour construire une telle liste :
-on choisit la position des 2 boules vertes dans le tirage : $\binom{5}{2}$ possibilités
-Pour chaque boule verte il y a 2 possibilités
-Pour chaque boule rouge il y a 4 possibilités
Donc $card(A) = \binom{5}{2}.2^2.4^3$ et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{2}.2^2.4^3}{6^5} = \frac{80}{243}$$

□

2)tirage successif sans remise : cette fois Ω est l'ensemble des 5-listes sans répétition (arrangements) de $[\![1,6]\!]$, muni de la probabilité uniforme, d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{6\times5\times4\times3\times2}$.
Il reste à compter le nombres de 5-arrangements de $[\![1,6]\!]$ contenant exactement 2 boules vertes. Pour construire un tel arrangement :
-on choisit la position des 2 boules vertes dans le tirage : $\binom{5}{2}$ possibilités
-On choisit la première boule verte (2 possibilités) puis la seconde (1 possibilité)
-On choisit les 3 boules rouges (distinctes) : $4 \times 3 \times 2$ possibilités
Donc $card(A) = \binom{5}{2} \times (2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2)$ et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{2} \times (2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{3}$$

□

3)tirage simultané : cette fois Ω est l'ensemble des 5-combinaisons (ie des parties à 5 éléments) de $[\![1,6]\!]$, muni de la probabilité uniforme, d'où $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{\binom{6}{5}}$.
Dans ce cas, $card(A) = \binom{2}{2}.\binom{4}{3}$ et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{2}{2}.\binom{4}{3}}{\binom{6}{5}} = \frac{2}{3}$$

□

§ 10. Dans des situations non uniformes, on pourra par exemple s'appuyer sur la propriété suivante :

Théorème 5.[construction d'une mesure de probabilité finie]

■ On note $\Omega = \{x_1, \cdots, x_N\}$, avec $N = card(\Omega)$

■ Soit $(p_1, \cdots, p_N)$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

★ Il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, N]\!] \quad \mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$$

★ Pour tout événement $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tel que } x_i \in A} p_i$$

démonstration rapide :

Par analyse-synthèse :

-Analyse : Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω qui a la propriété souhaitée, et soit $A \subset \Omega$. A est l'union finie disjointe des singletons $(\{x_i\})_{i \text{ tel que } x_i \in A}$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tel que } x_i \in A} \mathbb{P}(\{x_i\}) = \sum_{i \text{ tel que } x_i \in A} p_i$$

Il y a donc au plus une fonction $\mathbb{P}$ possible.

-Synthèse : on vérifie que cette fonction $\mathbb{P}$ satisfait à la définition d'une probabilité sur Ω

□

Exemple 6. On retrouve la probabilité uniforme lorsque $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{1}{N}$

Exemple 7. Un sac contient 5 jetons, 2 verts et 3 rouges. On choisit un jeton au hasard. Soit V l'événement « le jeton tiré est vert ». Voici deux façons de modéliser cette expérience et de calculer $\mathbb{P}(V)$:

— **Premier modèle** : Ω est l'ensemble des jetons, muni de la probabilité uniforme. V est alors l'ensemble des jetons verts et
$$\mathbb{P}(V) = \frac{card(V)}{card(\Omega)} = \frac{2}{5}$$

— **Second modèle** : Ω est l'ensemble des couleurs que l'on peut obtenir : $\Omega = \{vert, rouge\}$ et $V = \{vert\}$ est maintenant un événement élémentaire. La mesure $\mathbb{P}$ est alors définie par $\mathbb{P}(\{vert\}) = \frac{2}{5}$ (et donc $\mathbb{P}(\{rouge\}) = 1 - \mathbb{P}(\{vert\}) = \frac{3}{5}$), de sorte que les deux modèles sont équivalents.

Exercice 7. On considère deux urnes ; l'urne 1 contient 3 boules rouges et 2 boules vertes ; l'urne 2 contient 3 boules rouges et 4 boules vertes.

On tire alors une fois à pile ou face avec une pièce non truquée ; si on obtient pile, on pioche une boule dans l'urne 1. Sinon on pioche une boule dans l'urne 2

1. Proposer un modèle (ie un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$) pour cette expérience
2. Écrire l'evenement $A =$ « tirer une boule rouge »en extension et en déduire sa probabilité.

réponse :

1)Un univers possible est $\Omega = \{pile, face\} \times \{rouge, vert\}$. Pour définir $\mathbb{P}$ on peut raisonner ainsi

-la pièce est non truquée, donc la probabilité de tirer pile (resp. face) est $\frac{1}{2}$. Donc

$$\mathbb{P}(\{(pile, rouge)\}) + \mathbb{P}(\{(pile, vert)\}) = \mathbb{P}(\{(face, rouge)\}) + \mathbb{P}(\{(face, vert)\}) = \frac{1}{2}$$

-Il y a 3 boules rouges et 2 vertes dans l'urne 1, donc $\frac{\mathbb{P}(\{(pile,rouge)\})}{\mathbb{P}(\{(pile,vert)\})} = \frac{3}{2}$. De même en considérant l'urne 2, $\frac{\mathbb{P}(\{(face,rouge)\})}{\mathbb{P}(\{(face,vert)\})} = \frac{3}{4}$
-Le seul modèle raisonnable est donc :

$$\mathbb{P}(\{(pile,rouge)\}) = \frac{3}{10} \quad \mathbb{P}(\{(pile,vert)\}) = \frac{2}{10}$$
$$\mathbb{P}(\{(face,rouge)\}) = \frac{3}{14} \quad \mathbb{P}(\{(face,vert)\}) = \frac{4}{14}$$

NB : nous éviterons à l'avenir ce genre de raisonnement (particulièrement lourd !). Dans ce type de situation, on s'appuiera plutôt sur la notion de probabilité conditionnelle sans définir précisément $(\Omega,\mathbb{P})$ *, voir suite du cours.*

□

2) $A = \{(pile,rouge),(face,rouge)\}$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(pile,rouge)\}) + \mathbb{P}(\{(face,rouge)\}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{14} = \frac{18}{35}$$

NB : là encore, la notion de probabilité conditionnelle donnera un calcul plus élégant de $\mathbb{P}(A)$*, sans avoir besoin d'expliciter* $(\Omega,\mathbb{P})$

□

3 Probabilités conditionnelles

§ 11. Imaginons une expérience $\mathcal{E}$ composée de deux expériences successives $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
Intuitivement les chances de succès d'un événement lié à $\mathcal{E}_2$ peuvent dépendre (ou pas) de ce qui s'est passé lors de l'expérience $\mathcal{E}_1$.
Nous allons modéliser ces situations par la notion de probabilité conditionnelle.
Exemple 8. On lance un dé (expérience $\mathcal{E}_1$) on obtient un numéro k ; puis on tire simultanément k jetons numérotés de 1 à 10 dans un sac (expérience $\mathcal{E}_2$)
L'événement $B =$« tirer le jeton numéro 10 » concerne l'expérience 2, mais dépend intuitivement du nombre obtenu avec le dé.
Exemple 9. On joue trois fois de suite à pile ou face, et on pose $B =$« obtenir pile au troisième tirage ». Intuitivement la réalisation de B ne dépend pas des résultats des premier et second tirages.
§ 12. Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Définition 6.
■ Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) > 0$,
★ La probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $\mathbb{P}(B|A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque. Si $A \subset B$ (autrement dit si B se réalise toujours lorsque A se réalise), alors $\mathbb{P}(B|A) = 1$
Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(B|A) = 0$
Exercice 8. On lance deux dés ordinaires non truqués.
Soient les événements $A =$ « le plus grand nombre obtenu est 5 »et $B =$ « la somme des nombres

obtenus est supérieure ou égale à 10 ».
Calculer $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B|A)$.
réponse :
-modèle : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.
-Nous avons

$$A = [\![1,5]\!]^2, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{25}{36}$$
$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{4}{36}$$
$$A \cap B = \{(5,5)\}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

donc

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{25}$$

□

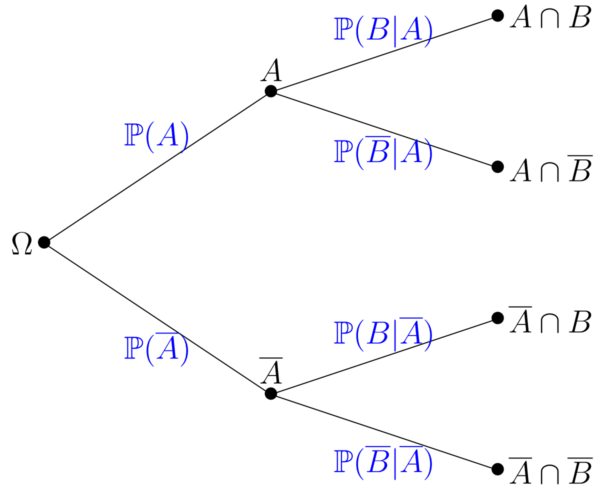
Exemple 10. On tire deux fois, successivement et sans remise, dans une urne contenant 4 boules blanches et 7 boules noires.

— Modèle : Ω est l'ensemble des couples de boules distinctes, muni de la probabilité uniforme
— Considérons les événements A =« la première boule tirée est blanche »et B =« la seconde boule tirée est blanche » ; nous avons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4 \times 10}{11 \times 10} (= \frac{4}{11})$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{4 \times 3}{11 \times 10} = \frac{6}{55}$$
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{4\times3}{11\times10}}{\frac{4\times10}{11\times10}} = \frac{3}{10}$$

— On retrouve $\mathbb{P}(B|A)$ sans calcul (et on fera ainsi en pratique !) en disant que, si A est supposé vrai, alors B se réalise lorsque, au second tirage, on tire une des 3 boules blanches restantes parmi les 10 boules encore présentes...

§ 13. On peut représenter les probabilités conditionnelles associées à deux événements A, B (et leurs contraires) par un arbre pondéré :

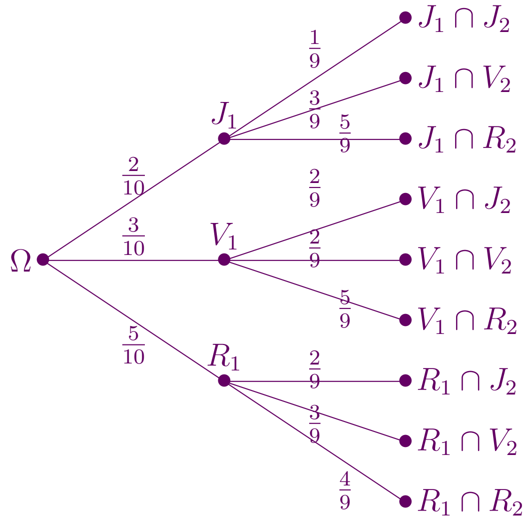


§ 14. Sur cet arbre on observera que la somme des valeurs des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
Selon les circonstances on pourra complexifier cet arbre :

- En remplaçant $(A, \overline{A})$ par un système complet d'événements ; le nombre de branches issues d'un noeud est alors augmenté ;
- En ajoutant aux événements "successifs" A, B d'autres événements C, D, etc. Dans ce cas la profondeur de l'arbre est augmentée.

Exercice 9. On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne contenant 2 boules jaunes, 3 boules vertes et 5 boules rouges.
Représenter l'espace probabilisé correspondant par un arbre pondéré. On prendra soin de définir clairement les événements qui correspondent aux divers noeuds de l'arbre.

réponse :
Pour $k \in [\![1, 2]\!]$, nous appelons respectivement J_k, V_k et R_k l'événement « tirer une boule jaune (resp. verte)(resp. rouge) au tirage k »



□

Proposition 6.
■ Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$.
★ L'application

$$\mathbb{P}_A : B \mapsto \mathbb{P}(B|A)$$

est une mesure de probabilité sur Ω

démonstration rapide :
En utilisant la définition, on montre successivement :
- $\forall B \subset \Omega \quad \mathbb{P}_A(B) \geq 0$
- $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$
- Pour tous $B_1, B_2 \subset \Omega$ tels que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2)$

□

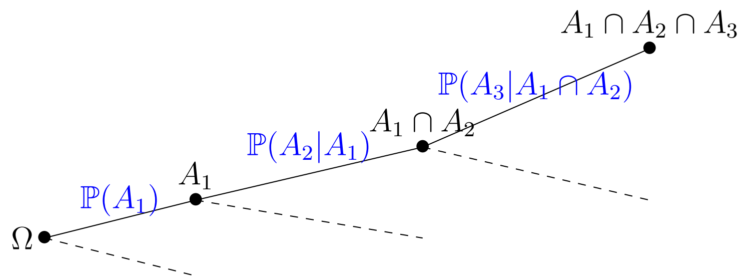
Théorème 7.[probabilités composées]
■ Soient A, B des événements, $\mathbb{P}(A) > 0$
★ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)$
■ Plus généralement, soient $A_1, A_2, \cdots A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$
★

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

démonstration :
- $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A\cap B)$
- la seconde formule se déduit de la première par récurrence.

□

§ 15. Illustration avec un arbre pondéré ($n = 3$) : la probabilité de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ est le produit des valeurs des branches conduisant à cet événement



§ 16. Attention : dessiner un arbre ne constitue pas une démonstration !
Dans un exercice, il conviendra d'utiliser la formule des probabilités composées avec des événements A, B (ou $A_1, \cdots, A_n$) **clairement définis**.
Exemple 11. On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 4 boules blanches et 5 boules rouge, calculons la probabilité de $E =$ « toutes les boules tirées sont blanches ».
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ notons $A_i =$« la boule obtenue au tirage numéro i est blanche ». Avec ces notations, nous avons $E = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\\ &= \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\\ &= \frac{1}{21}\end{aligned}$$

Théorème 8.[formule des probabilités totales]
- Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
- Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

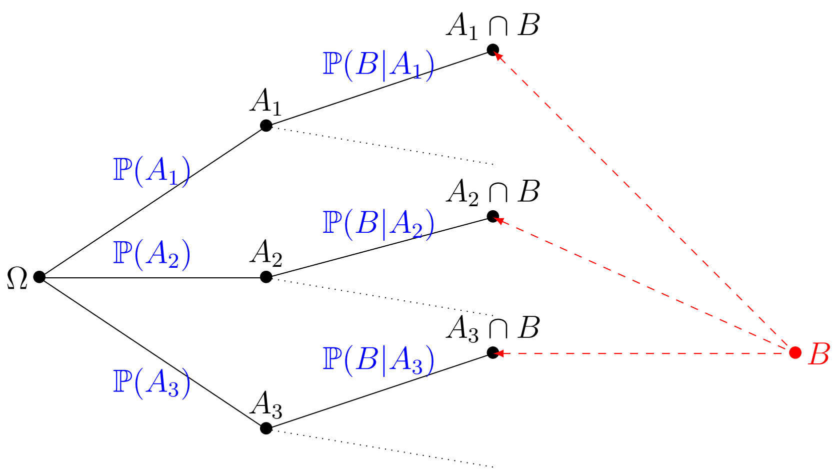
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B|A_i)$$

démonstration :
Les événements $(B \cap A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est B, donc

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B|A_i)$$

□

§ 17. Illustration ($n = 3$). La probabilité de B est la somme des probabilités des "chemins" conduisant à la réalisation de B ; la probabilité d'un chemin est le produit des valeurs des branches qui le constituent



Exercice 10. Une urne contient 1 boule blanche et 6 boules rouges.
On lance un dé ordinaire non truqué, on obtient un nombre k.
On pioche alors simultanément k boules dans l'urne.
Quelle est la probabilité de $B =$« la boule blanche a été tirée » ?
indication : un arbre peut aider mais n'est pas une preuve. Utiliser les événements $A_k =$ « le dé est tombé sur le nombre k »

réponse :
La famille $(A_1, A_2, \cdots, A_6)$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(B|A_k)\\ &= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}.\frac{\binom{1}{1}\binom{6}{k-1}}{\binom{7}{k}}\\ &= \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{42}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

§ 18. Très souvent les probabilités conditionnelles sont liées à un lien de "cause" à "effet" entre deux événements.
Imaginons un événement A qui se produirait "avant" un événement B :
- le nombre $\mathbb{P}(B|A)$ indiquerait les chances que B soit la "conséquence" de A.
- le nombre $\mathbb{P}(A|B)$ mesurerait alors les chances que la "cause" A ait eu lieu sachant que B s'est réalisé

La formule de Bayes (aussi appelée formule des causes) établit une relation simple mais remarquable entre ces deux probabilités :

Théorème 9.[formule de Bayes]
■ Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$.
★

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

démonstration :
Nous avons $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A)$. Il suffit alors d'appliquer la formule des probabilités composées, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B)$$

□

Remarque. On utilise souvent cette relation avec la formule des probabilités totales. Si A un événement de probabilité autre que 0 ou 1 on a en effet, avec le système complet d'événements $(A, \overline{A})$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B|\overline{A})$$

donc

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{A})}$$

On généralise facilement à un système complet d'événements quelconque :

Corollaire 10.
- Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
- Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$.

★

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

démonstration :
On applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)}$$

puis la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

□

Exemple 12. On effectue un test de dépistage d'un virus. On dispose des informations suivantes :
- 1% de la population est malade
- Pour 95% des personnes malades le test est positif
- Pour 2% des personnes saines le test est positif

On veut calculer la probabilité pour qu'une personne testée positive soit effectivement malade.
Soit Ω la population étudiée (muni de la probabilité uniforme) notons
- $P =$« l'individu choisi est testé positif »
- $M =$« l'individu choisi est malade »

Les hypothèses se traduisent $\mathbb{P}(M) = 0,01$ $\mathbb{P}(P|M) = 0,95$ $\mathbb{P}(P|\overline{M}) = 0,02$ On peut donc appliquer la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|M).\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M).\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\overline{M}).\,\mathbb{P}(\overline{M})}\\ &= \frac{0,95 \times 0,01}{0,95 \times 0,01 + 0,02 \times 0,99} \approx 0,324\end{aligned}$$

Contrairement aux apparences, ce test n'est pas vraiment fiable !
Exercice 11. Une urne contient 1 boule blanche et 6 boules rouges.
On lance un dé ordinaire non truqué, on obtient un nombre k.
On pioche alors simultanément k boules dans l'urne.

On apprend que la boule blanche fait partie des boules tirées. Quelle est alors la probabilité d'avoir obtenu un 6 avec le dé ?

réponse :

Soit A_k =« le nombre affiché par le dé est k ». Soit B =« la boule blanche fait partie des boules tirées ». Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(A_6|B)$. D'après la formule de Bayes (et un des exercices précédents)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_6|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_6)\,\mathbb{P}(A_6)}{\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(B|A_k)\,\mathbb{P}(A_k)} \\ &= \frac{\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

□

4 Indépendance

§ 19. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Définition 7.

■ Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

★ On dit que A et B sont *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B)$$

Remarque. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
Dans ce cas, et si $\mathbb{P}(A) > 0$, on aura aussi $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Exemple 13. On lance un dé ordinaire non truqué. On a $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité uniforme.

Soient A =« obtenir un nombre pair » et B =« obtenir au moins 5 ».

On a $A \cap B = \{6\}$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

On constate que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B)$, donc A et B sont indépendants.

Exemple 14. On tire à Pile ou Face deux fois de suite et on suppose l'expérience équiprobable. L'univers est ici $\Omega = \{pile, face\}^2$, muni de la probabilité uniforme.

Considérons les événements A =« obtenir pile au premier tirage » et B =« obtenir pile au deuxième tirage ». Alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\{(pile, face), (pile, pile)\}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}\{(pile, pile), (face, pile)\}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Card}(\{(pile, pile\})}{4} = \frac{1}{4}$$

On observe que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B)$, donc A et B sont des événements indépendants.

En pratique on admettra l'indépendance de A et B en disant que les deux tirages s'effectuent dans des conditions indépendantes.

Remarque. En général des événements incompatibles ne sont pas indépendants.

Exercice 12. Soit A un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Montrer que A et $\overline{A}$ ne sont pas indépendants.

réponse :

Supposons A et $\overline{A}$ indépendants. Nous avons donc

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{A})$$

donc

$$\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$: contradiction

□

Exercice 13. Soit A, B des événements indépendants.

1. Montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

réponse :

1) On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(B \setminus A) \\
&= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \qquad \text{par indépendance de } A \text{ et } B \\
&= \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

donc B et $\overline{A}$ sont bien indépendants.

2) D'après la question 1 (appliquée à A et B), B et $\overline{A}$ sont indépendants. Appliquons encore la question 1, avec B et $\overline{A}$: $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants.

□

Définition 8.

■ Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.

★ On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsque pour toute partie $J \subset [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Remarque. On ne confondra pas l'indépendance mutuelle avec l'indépendance deux à deux, qui s'écrirait :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$$

L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

§ 20. En pratique on obtient souvent des événements indépendants en effectuant plusieurs expériences aléatoires successives, dans des « conditions indépendantes » (au sens intuitif du terme)

Théorème 11.[modélisation d'une suite d'expériences indépendantes]
■ Soit une expérience $\mathcal{E}$ consistant à effectuer des expériences aléatoires $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ l'une après l'autre dans des « conditions indépendantes »
■ Soient $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ des espaces probabilisés finis associés à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ respectivement. L'univers associé à $\mathcal{E}$ est donc $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
★ On définit une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω par

$$\forall (x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \quad \mathbb{P}\left\{(x,y)\}\right) = \mathbb{P}_1(\{x\}).\,\mathbb{P}_2(\{y\})$$

■ Soient $A \subset \Omega_1$ et $B \subset \Omega_2$.
★ $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(B)$
★ Les événements $A \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times B$ sont indépendants (dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$).

démonstration rapide :
On pose $\Omega_1 = \{x_1, x_2 \cdots x_{N_1}\}$, $\Omega_2 = \{y_1, \cdots, y_{N_2}\}$, $p_i = \mathbb{P}_1(\{x_i\})$ et $q_j = \mathbb{P}_1(\{y_j\})$.
1) Les nombres $(p_i q_j)_{i \leq N_1, j \leq N_2}$ sont positifs et leur somme est

$$\sum_{i,j} p_i q_j = (\sum_i p_i)(\sum_j q_j) = 1 \times 1 = 1$$

donc on définit bien une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω par $\mathbb{P}(\{(x_i, y_j)\}) = p_i q_j$
2) Notons $I = \left\{ \; i \;\; / \;\; x_i \in A \; \right\}$ et $J = \left\{ \; j \;\; / \;\; y_j \in B \; \right\}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \times B) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} \mathbb{P}(\{(x_i, y_j)\}) = \sum_{(i,j) \in I \times J} p_i q_j \\ &= (\sum_{i \in I} p_i)(\sum_{j \in J} q_j) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(B) \end{aligned}$$

3) Notons $U = A \times \Omega_2$ et $V = \Omega_1 \times B$. D'après le point (2), $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(\Omega_2) = \mathbb{P}_1(A)$ et de même $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_2(B)$. De plus $U \cap V = A \times B$ donc

$$\mathbb{P}(U \cap V) = \mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(B) = \mathbb{P}(U)\,\mathbb{P}(V)$$

U et V sont bien indépendants.

□

Remarque. Intuitivement $A \times \Omega_2$ (resp. $\Omega_1 \times B$) est un événement qui ne dépend que du résultat de $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$)
Remarque. Plus généralement, si on effectue une suite d'expériences $\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n$ dans des conditions indépendantes, et si U_i est un événement qui ne dépend que du résultat de $\mathcal{E}_i$, alors $U_1, \cdots, U_n$ sont mutuellement indépendants.
Cette remarque s'applique en particulier aux schémas de Bernoulli :
Exemple 15. On tire à pile ou face (expérience $\mathcal{E}_1$) puis on lance un dé (expérience $\mathcal{E}_2$).

— Les expériences sont a priori indépendantes. Les univers sont $\Omega_1 = \{pile, face\}$ et $\Omega_2 = [\![1, 6]\!]$ munis des probabilités uniformes
— Considérons les événements (de l'expérience complète) $U =$ « la pièce tombe sur pile »et $V =$« le dé donne un nombre pair ». Formellement, $U = \{pile\} \times \Omega_2$ et $V = \Omega_1 \times \{2, 4, 6\}$, $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}_1(\{pile\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_2(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$
— Le théorème assure que U et V sont des événements indépendants

Définition 9.
■ Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
★ Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience à deux issues "succès" et "échec", et telle que la probabilité $\mathbb{P}(\{succès\}) = p$
★ Un schéma de Bernoulli de paramètres (n, p) est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p dans des conditions indépendantes.

Exemple 16.
- Un tirage à pile ou face avec une pièce non truquée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$
- Considérons une urne contenant 1 boule rouge et 10 boules blanches, disons qu'un succès consiste à tirer la boule rouge. On effectue 7 tirages successifs avec remise dans l'urne : il s'agit d'un schéma de Berboulli de paramètres $(7, \frac{1}{11})$

Exemple 17. Pour un schéma de Bernoulli de paramètre (n, p),
- L'univers est $\{succes, echec\}^n$. La mesure $\mathbb{P}$ n'est en général pas uniforme, sauf si $p = \frac{1}{2}$
- Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $A_k =$ « obtenir un succès lors de la k-ième expérience ». Les événements $(A_1, \cdots, A_n)$ sont mutuellement indépendants (et leurs contraires aussi) et $\mathbb{P}(A_k) = p$.
- La probabilité d'obtenir un succès lors de la première épreuve et des échecs à toutes les épreuves suivantes est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(\overline{A_2}) \cdots \mathbb{P}(\overline{A_n}) = p(1-p)^{n-1}$$

Exercice 14. On considère un schéma de Bernoulli de paramètre (n, p), et un entier $k \in [\![0, n]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $E_k =$« obtenir exactement k succès » ?

réponse :
Notons $\Omega = \{s, e\}^n$; une issue de l'expérience est une suite de n valeurs égales à e ou s.
- E_k est l'ensemble des n uplets qui contiennent exactement k fois la lettre s (et donc $n-k$ fois la lettre e. Donc $card(E_k) = \binom{n}{k}$
- Par ailleurs, chaque événement élémentaire dans E_k a la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (on utilise ici l'indépendance mutuelle de $A_1, A_2, \cdots A_n$)
- Donc $\mathbb{P}(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

□