# Espaces vectoriels

**PCSI**

Dans tout ce chapitre

- on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- on se donne $n \in \mathbb{N}^*$

# 1. Structure d'espace vectoriel

## 2. Sous-espaces vectoriels

## 3. Familles de vecteurs libres et génératrices, bases

# 4. Applications linéaires

Plan de cette partie :

1. Définition des applications linéaires (AL), caractérisation, vocabulaire et exemples
2. Opérations sur les AL : combinaisons linéaires, composition
3. Effet d'une AL sur un sous-espace vectoriel : noyau et image. Caractérisation des AL injectives ou surjectives
4. Effet d'une AL sur une famille de vecteur

Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application.

**Définition 1**

★ $f$ est dite linéaire lorsque :

- $\forall (a, b) \in E \times E \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$, et
- $\forall (\lambda, a) \in \mathbb{K} \times E \qquad f(\lambda.a) = \lambda.f(a)$

★ Lorsque $F = E$ on dit que $f$ est un endomorphisme de $E$.

★ Une application linéaire bijective $E \to F$ est appelée un isomorphisme (automorphisme lorsque $F = E$).

★ S'il existe un isomorphisme de $E$ dans $F$ on dit que $E$ et $F$ sont isomorphes.

*Notation.*

- L'ensemble des applications linéaires $E \to F$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$ (ou $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$).
- L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé groupe linéaire de $E$, noté $\mathrm{GL}(E)$

**Exemple**

- L'application nulle $E \to F$, $x \mapsto 0_F$ est linéaire.
- L'application identité $\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de $E$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'homothétie de rapport $\lambda$ est l'endomorphisme $x \mapsto \lambda x$ de $E$, on la note $\lambda \mathrm{Id}_E$
- La dérivation $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$
- La rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ : $z \mapsto e^{i\theta} z$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- L'application $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (projection orthogonale sur l'axe des abscisses)
- L'application $(x, y) \mapsto (y, x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$)
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $u_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $u_A : X \mapsto AX$ est une application linéaire dite canoniquement associée à $A$.

**Proposition 1** Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors

- $f(0_E) = 0_F$.
- $\forall x \in E \quad f(-x) = -f(x)$

**Proposition 2** [caractérisation d'une application linéaire]

★ Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est linéaire
2. $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2 \quad f(\lambda . x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

**Proposition 3** [combinaisons linéaires d'applications linéaires]
★ $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)(= F^E)$.

**démonstration :**

- L'application nulle est linéaire, donc $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $f + \alpha g$ est linéaire.

Soient $(x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}(f + \alpha g)(\lambda x + y) &= f(\lambda x + y) + \alpha g(\lambda x + y)\\ &= \lambda f(x) + f(y) + \alpha\lambda g(x) + \alpha g(y)\\ &= \lambda f(x) + \lambda\alpha g(x) + f(y) + \alpha g(y)\\ &= \lambda(f + \alpha g)(x) + (f + \alpha g)(y)\end{aligned}$$

donc $f + \alpha g$ est linéaire.
En conclusion $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^E$.

**Proposition 4** [composition d'applications linéaires]

- Soient $E$, $F$ et $G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires.

★ $g \circ f : E \to G$ est linéaire

★ Si $f$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire (bijective)

**démonstration :**
1) Montrons que $g \circ f$ est linéaire. Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On calcule

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + \lambda x') &= g(f(x + \lambda x')) = g(f(x) + \lambda f(x')) = g(f(x)) + \lambda g(f(x')) \\ &= (g\circ) f(x) + \lambda (g \circ f)(x')\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.
2) Supposons que $f$ est un isomorphisme. Alors $f$ est une bijection et $f^{-1}$ aussi. On doit donc montrer que $f^{-1}$ est linéaire.
Soient $y, y' \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme $f$ est linéaire on a

$$f(f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(y)) + \lambda f(f^{-1}(y')) = y + \lambda y'.$$

Donc $f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y') = f^{-1}(y + \lambda y')$. Donc $f^{-1}$ est linéaire.

**Proposition 5**

■ Soient $E, F, G$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

■ Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $h, j \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

★ $(h + j) \circ f = h \circ f + j \circ f$

★ $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$

★ $(\lambda h) \circ f = h \circ (\lambda f) = \lambda (h \circ f)$

**démonstration :**
- Les formules

$$(h+j)\circ f = h\circ f + j\circ f$$
$$(\lambda h)\circ f = \lambda(h\circ f)$$

sont vraies pour toutes applications $h, j, f$ ; elles résultent de la définition de l'addition et du produit externe dans l'ensemble $G^F$ des fonctions $F \to G$.
- Les formules

$$h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$$
$$h\circ(\lambda f) = \lambda(h\circ f)$$

résultent de la linéarité de l'application $h$.

*Remarque.* Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau, non commutatif en général.
Les règles de calcul habituelles (développements, factorisations, puissances) s'appliquent ; en particulier les identités remarquables $f^n - g^n$ et $(f+g)^n$ sont valables pour des endomorphismes $f$ et $g$ qui commutent, ie lorsque $f \circ g = g \circ f$

*Exercice 1.* Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définis par

$$f(x,y) = (y, -x) \quad \text{et} \quad g(x,y) = (x-2y, 5x-y)$$

1. Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires
2. Donner l'expression de $f \circ g(x,y)$ et $g \circ f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
3. Montrer que $f$ et $g$ sont bijectives, donner l'expression de $f^{-1}$ et de $g^{-1}$.

**Réponse :**

1) Montrons que $f$ est linéaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous calculons

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + (x',y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (\lambda y + y', -(\lambda x + x')) = \lambda(y, -x) + (y', -x') \\ &= \lambda f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est une linéaire.}}$ La démonstration est semblable pour $g$

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f \circ g(x,y) &= f(x - 2y, 5x - y) = (5x - y, -x + 2y) \\ g \circ f(x,y) &= g(y, -x) = (y + 2x, 5y + x) \end{aligned}$$

3) Montrons par exemple que $g$ est bijective. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, considérons l'équation d'inconnue $(x, y)$ :

$$g(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 5x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-a+2b}{9} \\ y = \frac{-5a+b}{9} \end{cases}$$

Nous trouvons une solution unique, donc $\boxed{g \text{ est bien bijective}}$ et

$$g^{-1}(a, b) = \left( \frac{-a + 2b}{9}, \frac{-5a + b}{9} \right)$$

On trouve de même $f^{-1}(a, b) = (-b, a)$, autrement dit $f^{-1} = -f$

*Exercice 2.*

1. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{K}$ est de la forme $f_\alpha : x \mapsto \alpha x$ (où $\alpha \in \mathbb{K}$)
2. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, que dire de $f_\alpha + f_\beta$ ? de $f_\alpha \circ f_\beta$ ?
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $f_\alpha$ est-elle bijective ?

**Réponse :**
1) Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ linéaire. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, nous avons donc

$$f(x) = f(x.1) = x.f(1) = \alpha x = f_\alpha(x)$$

où $\alpha = f(1)$. Inversement pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on vérifie facilement que $f_\alpha$ est une application linéaire.
2) Pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$(f_\alpha + f_\beta)(x) = \alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$$
$$(f_\alpha \circ f_\beta)(x) = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

donc $\boxed{f_\alpha + f_\beta = f_{\alpha+\beta}}$ et $\boxed{f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha.\beta}}$
3) $f_0$ est la fonction nulle et n'est donc pas bijective. Mais pour $\alpha \in \mathbb{K}^*$,

$$f_\alpha \circ f_{\frac{1}{\alpha}} = f_1 = \mathrm{Id}_\mathbb{K}$$

donc $\boxed{f_\alpha \text{ est bijective ssi } \alpha \neq 0, \text{ d'inverse } f_{\frac{1}{\alpha}}}$

**Proposition 6**

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

■ Soient $A$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $B$ un sous-espace vectoriel de $F$.

★ L'image directe $f(A) = \left\{ \ f(x) \quad / \quad x \in A \ \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

★ L'image réciproque $f^{-1}(B) = \left\{ \ x \in E \quad / \quad f(x) \in B \ \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**démonstration :**

1) Montrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

$0_E \in A$ donc $f(0_E) \in f(A)$ donc $f(A) \neq \varnothing$.

Soient $x, y \in f(A)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a donc $x = f(a)$ et $y = f(a')$ avec $a, a' \in A$. Comme $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a $a + \lambda a' \in A$ donc

$$x + \lambda y = f(a) + \lambda f(a') = f(a + \lambda a') \in f(A)$$

Donc $f(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $F$.

2) Montrons que $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On a $f(0_E) = 0_F \in B$, donc $0_E \in f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B) \neq \varnothing$.

Soient $x, y \in f^{-1}(B)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$. Comme $B$ est un sous-espace vectoriel de $F$, on a $f(x) + \lambda f(y) \in B$, donc $f(x + \lambda y) \in B$, donc $x + \lambda y \in f^{-1}(B)$.

Donc $f^{-1}(B)$ est bien un sous-espace vectoriel de $E$.

**Définition 2** [noyau et image]

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

★ On appelle image de $f$, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble $f(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de $F$

★ On appelle noyau de $f$ et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$. C'est un sous-espace vectoriel de $E$

*Remarque.*

- $\mathrm{Im}(f) = \{\ f(x) \quad / \quad x \in E\ \}$
- $\mathrm{Ker}(f) = \{\ x \in E \quad / \quad f(x) = 0_F\ \}$

**Exemple**

- Le noyau (resp. l'image) de la fonction nulle $0 : E \to F$ sont respectivement $E$ et $\{0_F\}$
- Le noyau (resp. l'image) de la fonction identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$ sont respectivement $\{0_E\}$ et $E$
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, 0)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad (x, 0) = (0, 0) \ \right\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \ (x, 0) \quad / \quad x \in \mathbb{R} \ \right\} = \mathbb{R} \times \{0\}$$

*Exercice 3.* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x - y, x + z)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ (à préciser) tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

**Réponse :** 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nous avons

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{ \ (x, 2x, -x) \quad / \quad x \in \mathbb{R} \ \} = \{ \ x.(1, 2, -1) \quad / \quad x \in \mathbb{R} \ \} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1, 2, -1)\} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc poser $\boxed{a = (1, 2, -1)}$.

*remarque : le vecteur a obtenu n'est pas unique, tout vecteur de la forme $\lambda a$ avec $\lambda \neq 0$ convient !*

2) Il est immédiat que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, montrons que $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est engendré par la base canonique $i = (1,0), j = (0,1)$, il suffit de montrer que $i \in \mathrm{Im}(f)$ et $j \in \mathrm{Im}(f)$. Or nous observons que

$$f(0,-1,0) = (1,0) = i \text{ et } f(0,0,1) = (0,1) = j$$

Donc $i$ et $j$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

*Exercice 4.* Trouver le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $f : P \mapsto P'$

**réponse :**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P$ appartient au noyau de $f$ si et seulement si $P' = 0$, autrement dit lorsque $P$ est constant : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{K}}$

Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. $P$ appartient à l'image de $f$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q' = P$. Or un tel polynôme existe, il suffit de poser $Q = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}[X]}$

**Proposition 7** [caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité]

■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

★ $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$

★ $f$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

**démonstration :**
1) $f$ est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.
2) Si $f$ est injective, alors $0_F$ a au plus un antécédent par $f$ dans $E$, donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Réciproquement supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que $f$ est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Comme $f$ est linéaire on peut écrire

$$f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_F$$

donc $x - x' \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc $x - x' = 0_E$. Donc $f$ est injective.

**Exemple** $f : P \to P'$ est un endomorphisme surjective mais non injectif de $\mathbb{K}[X]$ (voir exercice précédent)

*Exercice 5.* Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x - 3y, 6y - 2x)$

**Réponse :**
$f(3,1) = (0,0)$ donc $(3,1) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f$ n'est pas injective.
Le vecteur $(1,0)$ n'est pas dans l'image de $f$ ; en effet si on suppose $(1,0) = f(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 6y - 2x = 0 \end{cases}$, Or on vérifie facilement que ce système est incompatible : contradiction. Donc $f$ n'est pas surjective.

**Proposition 8** [image d'une famille de vecteurs par une AL]

■ Soit $f \in Lcal(E, F)$

■ Soit $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n) \in E^n$ une famille de $n$ vecteurs de $E$. On note $\mathcal{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ : c'est une famille de vecteurs de $F$, dite image de $\mathcal{E}$ par $f$

★ Si $f$ est injective et $\mathcal{E}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre

★ Si $f$ est surjective et $\mathcal{E}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est génératrice

★ Si $f$ est bijective et $\mathcal{E}$ est une base de $E$, alors $\mathcal{F}$ est une base de $F$

★ Si $\mathcal{E}$ est une base de $E$, alors

$$\mathrm{Im}(f) = Vect(\mathcal{F}) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

**démonstration :**
1) Supposons $f$ injective et $\mathcal{E}$ libre. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

Comme $f$ est linéaire,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$$

Or $f$ est injective, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Or $\mathcal{E}$ est libre donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![ 1, n ]\!]$. Donc $\mathcal{F}$ est libre.
2) Supposons $f$ surjective et $\mathcal{E}$ génératrice. Soit $y \in F$. Comme $f$ est surjective il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $\mathcal{E}$ est génératrice dans $E$, il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$$

Donc $\mathcal{F}$ est bien génératrice dans $F$.

3) est la conjonction de (1) et (2)
4) $f$ induit une surjection de $E$ sur $\mathrm{Im}(f)$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de $E$, donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

*Remarque.* Les réciproques sont vraies : si l'image d'une famille libre (resp. génératrice) par $f$ est encore libre (resp. génératrice), alors $f$ est injective (resp. surjective)

*Exercice 6.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$f(x, y) = (x + y, 2x - y, 3x + y)$

1. Vérifier que $f$ est linéaire
2. Préciser l'image par $f$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$
3. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$
4. Montrer que $f$ est injective mais pas surjective.

**réponse :**

1)

2) Posons $i=(1,0)$ et $j=(0,1)$ (base canonique de $\mathbb{R}^2$). Nous obtenons $f(i)=(1,2,3)$ et $f(j)=(1,-1,1)$

3) Notons $e_1=f(i)$ et $e_2=f(j)$. D'après le théorème précédent, $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)=\mathrm{Im}(f)$ donc $(e_1,e_2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Nous vérifions facilement que cette famille est aussi libre, donc

$\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$

4) Étudions l'injectivité de $f$ en calculant son noyau. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

donc $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\}$ : $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Pour la non surjectivité, montrons que $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$. Il suffit de trouver un vecteur $e_3\in\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de $e_1$ et $e_2$. Par exemple $e_3=(1,0,0)\notin\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ (cela se démontre facilement par l'absurde). Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

## 5. Construction d'applications linéaires

Outre les opérations (addition, composition...) vues dans la partie précédente, nous allons présenter deux procédés pour construire des applications linéaires $E \to F$ :

1. En utilisant des sous-espaces supplémentaires
2. En utilisant une base de $E$ et une famille de vecteurs de $F$

**Théorème 9** [recollement d'applications linéaires]

■ Soient $E_1, E_2$ des sous-espaces supplémentaires de $E$ (ie $E_1 \oplus E_2 = E$, voir partie II)

■ Soient $\varphi_1 : E_1 \to F$ et $\varphi_2 : E_2 \to F$ des applications linéaires.

★ Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f_{|E_1} = \varphi_1 \text{ et } f_{|E_2} = \varphi_2$$

★ De plus pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $f(x_1 + x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$

**démonstration :**
Par analyse-synthèse.
-Soit $f \in L(E,F)$ qui vérifie toutes les conditions voulues, alors pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$$

Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, Il existe une unique fonction $f$ qui vérifie cette condition.
-Il reste à montrer que $f$ convient.
D'abord pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1) = f(x_1 + 0) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(0) = \varphi_1(x_1)$ donc $f_{|E_1} = \varphi_1$. De même $f_{|E_2} = \varphi_2$.
Enfin on vérifie que $f$ est une application linéaire (en utilisant la linéarité de $\varphi_1$ et de $\varphi_2$).

*Exercice 7.* Soient $E = \mathbb{R}^3$ $F = \mathbb{R}$, $E_1 = \left\{ \ (x, y, 0) \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \right\}$, $E_2 = \left\{ \ (0, 0, z) \quad / \quad z \in \mathbb{R} \ \right\}$. On pose $\varphi_1(x, y, 0) = x + y$, $\varphi_2(0, 0, z) = 3z$.

1. Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont linéaires
3. Donner l'expression de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ obtenue par recollement de $\varphi_1$ et $\varphi_2$.

**réponse :**

1) On vérifie facilement que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. De plus $E_1 + E_2 = \left\{ \ (x, y, 0) + (0, 0, z) \quad / \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \right\} = \mathbb{R}^3$, donc $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires.

2) Montrons que $\varphi_2$ est linéaire. Soient $(0, 0, z)$ et $(0, 0, z')$ dans $E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda(0, 0, z) + (0, 0, z')) &= \varphi_2(0, 0, \lambda z + z') \\ &= 3(\lambda z + z') = \lambda 3z + z' \\ &= \lambda\varphi_2(0, 0, z) + \varphi_2(0, 0, z') \end{aligned}$$

donc $\varphi_2$ est linéaire. Démonstration semblable pour $\varphi_1$.

3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f((x, y, 0) + (0, 0, z)) = f(x, y, 0) + f(0, 0, z) \\ &= \varphi_1(x, y, 0) + \varphi_2(0, 0, z) \\ &= \boxed{x + y + 3z} \end{aligned}$$

**Théorème 10** [construction d'AL par l'image d'une base]

■ Soit $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$

■ Soit $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ une famille quelconque de $F$.

★ Il existe une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que

$$\forall i \in [\![ 1, n ]\!] \quad \varphi(e_i) = f_i$$

★ $\varphi$ est injective (resp. surjective) (resp. bijective) si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre (resp. génératrice)(resp. une base).

**démonstration rapide :**
Par analyse-synthèse.
- Soit $\varphi$ une application linéaire qui convient et soit $x \in E$. Décomposons $x$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

donc

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

cette relation détermine la fonction $\varphi$ de façon unique.
- Il reste à constater que cette fonction $\varphi$ est linéaire, et que l'image de $e_i$ par $\varphi$ est bien $f_i$

**Exemple**

- Il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0) = (2,3,4)$ et $f(0,1) = (-7,1,0)$
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= x(2,3,4) + y(-7,1,0) \\ &= (2x - 7y, 3x + y, 4x) \end{aligned}$$

- La famille $((2,3,4),(-7,1,0))$ est libre, non génératrice dans $\mathbb{R}^3$, donc $\varphi$ est injective et non surjective.

*Exercice 8.* Dans $\mathbb{R}^3$ on appelle $(i, j, k)$ la base canonique et $e_1 = i - j$, $e_2 = i + 2j$, $e_3 = 2k$

1. Montrer que $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On donnera l'expression des vecteurs $i, j$ et $k$ dans cette base.
2. Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 4e_3$. Calculer $f(i)$, $f(j)$ et $f(k)$
3. En déduire $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

**réponse :**

1) Montrons d'abord que $(e_1, e_2, e_3)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, nous avons donc

$$\begin{aligned} & \lambda_1(i-j) + \lambda_2(i+2j) + \lambda_3 2k = 0 \\ \text{donc } & (\lambda_1+\lambda_2)i + (-\lambda_1+2\lambda_2)j + 2\lambda_3 k = 0 \\ \text{donc } & \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \text{donc } & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est bien libre.

Il reste à montrer que cette famille génératrice. Puisque $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(i, j, k)$, il suffit de montrer que les vecteurs $i, j$ et $k$ sont tous dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Or on voit aisément les relations :

$$i = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2), \quad j = \frac{1}{3}(e_2 - e_1), \quad k = \frac{1}{2}e_3$$

donc $(e_1, e_2, e_3)$ est une famille génératrice. C'est une base de $\mathbb{R}^3$

2) On calcule

$$\begin{aligned} f(i) &= f(\frac{1}{3}(2e_1 + e_2)) = \frac{1}{3}(2f(e_1) + f(e_2)) \\ &= \frac{1}{3}(-2e_1 + 0) = -\frac{2}{3}e_1 \\ &= \boxed{-\frac{2}{3}(i - j)} \end{aligned}$$

On trouve de même $\boxed{f(j) = \frac{1}{3}e_1 = \frac{1}{3}(i - j)}$ et $\boxed{f(k) = 2e_3 = 4k}$

3)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xi + yj + zk) = xf(i) + yf(j) + zf(k) \\ &= -\frac{2x}{3}(i - j) + \frac{y}{3}(i - j) + 4zk \\ &= \boxed{\left(\frac{-2x + y}{3}, \frac{2x - y}{3}, 4z\right)} \end{aligned}$$

# 6. Projecteurs et symétries

Les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes particuliers d'un espace vectoriel. Dans cette partie :

1. Nous donnons deux définitions équivalentes (algébrique puis géométrique) d'un projecteur, puis des exemples
2. Nous faisons de même pour les symétries

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Définition 3** [projecteurs, description algébrique]
★ On appelle projecteur (ou projection) de $E$ tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p \circ p = p$ (on dit aussi que $p$ est idempotent).

*Exercice 9.*

- Vérifier que $0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Id}_E$ sont des projecteurs de $E$
- Montrer que $p \in L(\mathbb{R}^2)$ défini par $p : (x, y) \mapsto (x, 0)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $p \in L(\mathbb{R}^3)$ défini par $p : (x, y, z) \mapsto (x, y, x)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

**réponse :**

1) Il suffit d'observer que $0 \circ 0 = 0$ et $\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $p \circ p(x, y) = p(x, 0) = (x, 0) = p(x, y)$, donc $p \circ p = p$ et $p$ est bien un projecteur de $\mathbb{R}^2$

3) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$p \circ p(x, y, z) = p(x, y, x) = (x, y, x) = p(x, y, z)$, donc $p \circ p = p$

*Exercice 10.*

1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $\lambda \,\mathrm{Id}_E$ est-elle un projecteur ?
2. Soit $p$ un projecteur de $E$, montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est aussi un projecteur de $E$
3. Soient $p$ et $q$ des projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer que $p + q$ est un projecteur.

**réponse :**
1) $(\lambda \mathrm{Id}_E)^2 = \lambda^2 \mathrm{Id}_E$ donc $\lambda \mathrm{Id}_E$ est un projecteur ssi $\lambda^2 = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$
2) Puisque $\mathrm{Id}_E$ et $p$ commutent, nous avons

$$(\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E^2 - 2\,\mathrm{Id}_E \circ p + p^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p = \mathrm{Id}_E - p$$

donc $\mathrm{Id}_E - p$ est bien un projecteur.
3) $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$, donc $p + q$ est un projecteur

La propriété fondamentale suivante donne une autre définition, de nature géométrique, des projecteurs :

**Théorème 11** [projecteurs, définition géométrique]

■ Soit $p \in L(E)$

★ Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $p$ est un projecteur
2. Il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $F$ et $G$ de $E$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in F \quad p(x) = x \\ \forall x \in G \quad p(x) = 0 \end{cases}$$

★ Le cas échéant, $\begin{cases} F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) \text{ et} \\ G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) \end{cases}$.

★ On dit alors que $p$ est le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

**Démonstration rapide :**
(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons (1), c'est-à-dire $p^2 = p$. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. On montre successivement :

- $\forall x \in F\ p(x) = x$ : pour cela on écrit $x = p(y)$ (définition de l'image) d'où $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. En passant on a montré que $F \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$
- $\forall x \in G\ p(x) = 0$ : par définition du noyau de $p$
- $F \cap G = \{0\}$ : pour $x \in F \cap G$, on a en même temps $p(x) = x$ et $p(x) = 0$ donc $x = 0$
- $F + G = E$ : pour $x \in E$, on observe que $x = p(x) + (x - p(x))$. On vérifie alors que $p(x) \in F$ (trivial) et $x - p(x) \in G$ (en utilisant $p^2 = p$ !)
- $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ : Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \subset F$. Or pour $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ on a $x = p(x)$, donc $x$ est dans l'image de $p$
- $G = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ : se montre de même par double inclusion (ou en appliquant ce qui précède au projecteur $\mathrm{Id} - p$...)

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons (2), et montrons que $p^2 = p$. Soit $x \in E$. Comme $F \oplus G = E$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. D'où :

$$p(x) = p(y+z) = p(y) + p(z) = y$$

et

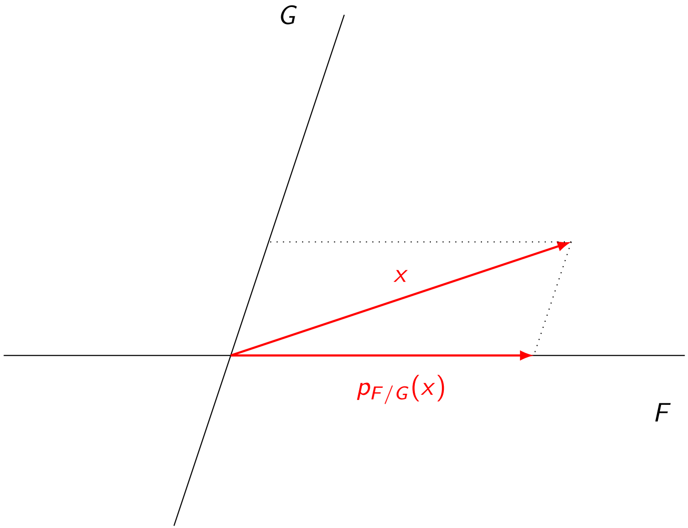
$$p^2(x) = p(p(x)) = p(y) = y = p(x)$$

Donc $p^2 = p$ et $p$ est bien un projecteur. $\square$

*Notation.* Dans ce cours, le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ sera noté $p_{F/G}$

*Remarque.* Un projecteur est donc caractérisé géométriquement par son noyau $(G)$ et son image $(F)$ et ceux-ci sont des sous-espaces supplémentaires.

Illustration : un vecteur $x \in E$ et son projeté $p_{F/G}(x)$ sur $F$ parallèlement à $G$ :



*Remarque.* Avec les notations du théorème :

- $q = \mathrm{Id}_E - p$ est alors le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$.
- Tout vecteur $x \in E$ se décompose, de façon unique, sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, et de plus : $u = p(x)$ et $v = q(x)$.

**Exemple**

1. L'endomorphisme nul 0 est le projecteur sur $\{0_E\}$ parallèlement à $E$
2. $\mathrm{Id}_E$ est le projecteur sur $E$ parallèlement à $\{0_E\}$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, le projecteur sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ parallèlement à $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ est $p : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$

*Exercice 11.* Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \mathrm{Vect}\{(1,3)\}$ et $G = \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x + 2y = 0 \ \right\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$. Représenter $F$ et $G$ sur un même dessin.
2. Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Représenter graphiquement les vecteurs $a = (9, -2)$ et $p(a)$
3. Donner (sans calcul) la valeur de $p(1,3)$ et $p(-2,1)$
4. En déduire la valeur de $p(1,0)$ et $p(0,1)$, puis l'expression de $p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**réponse :**

1) et 2) laissés en exercice

3) $(1,3) \in F$ et $F = \mathrm{Im}(p)$, donc $\boxed{p(1,3) = (1,3)}$.

$(-2,1) \in G$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$, donc $\boxed{p(-2,1) = (0,0)}$

4) $p(1,0) = p(\frac{1}{7}((1,3) - 3.(-2,1))) = \frac{1}{7}(p(1,3) - 3p(-2,1)) = \boxed{\dfrac{1}{7}(1,3)}$

$p(0,1) = p(\frac{1}{7}(2.(1,3) + (-2,1))) = \frac{1}{7}(2p(1,3) + p(-2,1)) = \boxed{\dfrac{2}{7}(1,3)}$

$p(x,y) = xp(1,0) + yp(0,1) = \boxed{\dfrac{x+2y}{7}(1,3)}$

*En particulier $p(a) = p(9,-2) = \frac{5}{7}(1,3)$, à vérifier sur le graphique fait à la question 2 !*

*Remarque.* Un projecteur autre que 0 et $\mathrm{Id}_E$ n'est ni injectif, ni surjectif.

**Définition 4** [symétries, définition algébrique]

★ On appelle symétrie de $E$ tout endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

**Exemple**

- $\mathrm{Id}_E$ et $-\mathrm{Id}_E$ sont des symétries de $E$.
- $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $s(x, y, z) = (-y, x, z)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
- $P \mapsto P(-\mathrm{X})$ est une symétrie de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Si $s$ est une symétrie de $E$ alors $-s$ aussi.

*Exercice 12.* Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie de $E$

**réponse :**
On effectue le calcul suivant, et on utilise la relation $p^2 = p$ :

$$(2p - \mathrm{Id})^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id} = 4p - 4p + \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

*Remarque.* $s \in L(E)$ est une symétrie si et seulement si $s$ est bijective et $s^{-1} = s$.

**Théorème 12** [symétries, définition géométrique]

■ Soit $s \in L(E)$

★ Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $s$ est une symétrie
2. Il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $F$ et $G$ de $E$ tels que
$$\begin{cases} \forall x \in F \quad s(x) = x \\ \forall x \in G \quad s(x) = -x \end{cases}$$

★ Le cas échéant, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(s + \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id}_E)$.

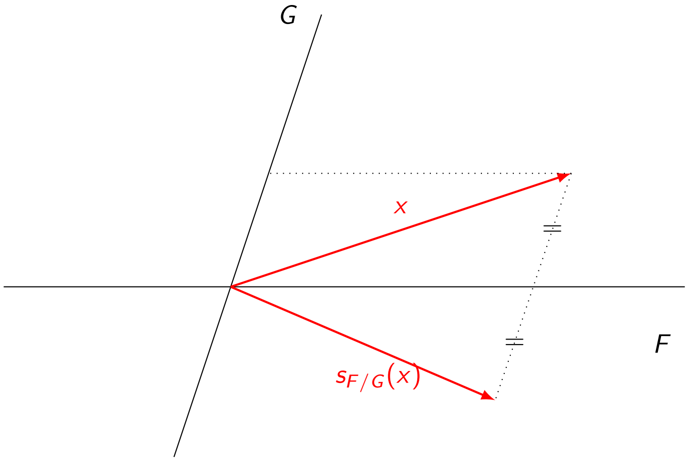
★ On dit alors que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ (notée $s_{F/G}$ dans ce cours)

**idée de la démonstration :**
On peut se ramener au théorème correspondant en posant $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s)$ et en observant que

$$s^2 = \mathrm{Id} \Leftrightarrow p^2 = p$$

De plus $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + s)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - s)$ $\square$

Illustration : un vecteur $x \in E$ et son symétrique $s_{F/G}(x)$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$ :



*Remarque.* Étant donnés $F$ et $G$ supplémentaires,

- $s_{G/F} = -s_{F/G}$
- $s_{F/G} = p_{F/G} - p_{G/F} = 2p_{F/G} - \mathrm{Id}_E$

*Remarque.* $-\mathrm{Id}_E$ est la symétrie par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à $E$

*Exercice 13.* Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F = \mathrm{Vect}\{(1,3)\}$ et $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x + 2y = 0 \right\}$. (qui sont supplémentaires, voir un des exercices précédents)

1. Soit $s$ la symétrie par rapport $F$ parallèlement à $G$. Représenter graphiquement $F$, $G$ et les vecteurs $a = (9,-2)$ et $s(a)$
2. Donner (sans calcul) la valeur de $s(1,3)$ et $s(-2,1)$
3. Trouver l'expression de $s(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**réponse :**

1) laissé en exercice

2) $(1,3) \in F$ et $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, donc $\boxed{s(1,3) = (1,3)}$.

$(-2,1) \in G$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, donc $\boxed{s(-2,1) = -(-2,1) = (2,-1)}$

3) Nous calculons alors :

$$s(1,0) = s(\tfrac{1}{7}((1,3) - 3.(-2,1))) = \tfrac{1}{7}(s(1,3) - 3s(-2,1)) = \boxed{\frac{1}{7}(-5,6)}$$

$$s(0,1) = s(\tfrac{1}{7}(2.(1,3) + (-2,1))) = \tfrac{1}{7}(2s(1,3) + s(-2,1)) = \boxed{\frac{1}{7}(4,5)}$$

$$s(x,y) = xs(1,0) + ys(0,1) = \boxed{\frac{1}{7}(-5x + 4y, 6x + 5y)}$$