Chapitre 20 - Variables aléatoires

Table des matières

1 Présentation **2**

2 Lois usuelles **7**

3 Espérance **9**

4 Variance, écart-type **13**

5 Couples de variables aléatoires **16**

6 Loi conditionnelle, indépendance **18**

§ 1. Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, associée à une expérience aléatoire donnée.

1 Présentation

Définition 1.[variable aléatoire]
■ Soit E un ensemble.
★ Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$
★ Le sous-ensemble de E :

$$\left\{ X(\alpha) \quad / \quad \alpha \in \Omega \right\}$$

des valeurs prises par la fonction X sera noté $X(\Omega)$.

Remarque.
- Il est d'usage de nommer les variables aléatoires par une lettre majuscule
- Le plus souvent E sera une partie de $\mathbb{R}$, voire de $\mathbb{Z}$. On parle alors de variable aléatoire réelle ou entière
- On peut voir une variable aléatoire comme une quantité qui dépend du résultat de l'expérience aléatoire.
- Dans ce cours Ω est supposé fini, donc $X(\Omega)$ est un ensemble fini. On peut même préciser que

$$card(X(\Omega)) \leqslant card(\Omega)$$

  C'est là tout l'intérêt des variables aléatoires : remplacer l'ensemble Ω, souvent très complexe, par un ensemble $X(\Omega)$ beaucoup plus simple.

Exemple 1. On lance deux dés ordinaires, on appelle X la somme des nombres obtenus ; X est une variable aléatoire à valeurs réelles.
Si on modélise cette expérience par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, on a par exemple $X(1, 6) = 7$.
L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$

Notation. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
- Pour toute partie F de E, nous pouvons définir un événement :

$$X^{-1}(F) = \left\{ \alpha \in \Omega \quad / \quad X(\alpha) \in F \right\}$$

  qui peut être décrit par « La valeur prise par X à l'issue de l'expérience appartient à F ».
  Cet événement $X^{-1}(F)$ sera le plus souvent noté $\{X \in F\}$ ou $(X \in F)$.
- Étant donné $a \in X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(\{a\})$ est noté $(X = a)$ ou $\{X = a\}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, L'événement $X^{-1}(] - \infty, a])$ est noté $\{X \leqslant a\}$. On définit de même les événements $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$, $\{X \neq a\}$ $\{X > a\}$.

Remarque. Attention : une variable aléatoire X est une fonction, pas un événement. En particulier une écriture du type « $\mathbb{P}(X)$ » n'a aucun sens !

Exercice 1. On lance deux dés et on appelle X le plus grand des deux nombres obtenus.
1. Écrire en extension les événements $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$ et $\{X \geqslant 5\}$
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X = 2\})$, $\mathbb{P}(\{X \leqslant 2\})$, $\mathbb{P}(\{X \neq 5\})$.

réponse :
Le modèle de cet expérience est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.
1)L'événement « X prend la valeur 1 » n'a qu'une seule issue favorable : les deux dés tombent sur 1. Autrement dit $\{X = 1\} = \{(1, 1)\}$
On a de même $\{X = 2\} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ et

$$\{X \geqslant 5\} = \{(5, 1), (5, 2), \cdots (5, 6)\} \cup \{(6, 1), \cdots , (6, 6)\} \cup$$
$$\{(1, 5), \cdots , (4, 5)\} \cup \{(1, 6), \cdots , (4, 6)\}$$

2) $\mathbb{P}(\{X=2\}) = \frac{card(\{X=2\})}{card(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
Les événements $(X=1)$ et $(X=2)$ sont incompatibles, d'union $(X \leqslant 2)$, donc

$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 2\}) = \mathbb{P}(\{X=1\}) + \mathbb{P}(\{X=2\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Enfin $\mathbb{P}(\{X \neq 5\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X=5\}) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$
§ 2. Soit F un ensemble et $f : E \to F$ une application.
La fonction composée $f \circ X$ est une variable aléatoire, à valeurs dans F, qui sera notée $f(X)$.
Si $E = \mathbb{R}$, nous obtenons donc des variables aléatoires X^2, X^3, e^X, etc...
On peut généraliser : considérons une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires sur Ω à valeurs dans des ensembles $E_1, \cdots, E_n$, et soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application. Avec ces notations $f(X_1, \cdots, X_n)$ est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans F
Exemple 2. On lance deux dés (un dé jaune et un dé rouge), on note X (resp. Y) le nombre affiché par le dé jaune (resp. rouge).
On peut en déduire de nombreuses variables aléatoires, comme $X+Y$, $X.Y$, X^2, $\max(X,Y)$ etc. et définir des événements avec :
Par exemple $\{X+Y=4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ et $\mathbb{P}(\{X+Y=4\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
§ 3. La définition suivante est fondamentale pour l'étude d'une variable aléatoire :

Définition 2.[loi d'une variable aléatoire]
★ La loi de X est l'application notée $\mathbb{P}_X : X(\Omega) \to [0,1]$ définie par

$$\forall a \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}_X(a) = \mathbb{P}(\{X=a\})$$

Remarque. On peut étendre $\mathbb{P}_X$ en une fonction définie sur E. Cependant pour $a \notin X(\Omega)$, l'événement $\{X=a\}$ est impossible, donc $\mathbb{P}_X(a) = 0$.
Exemple 3. On lance deux dés et on appelle X le plus grand des nombres obtenus. Déterminons la loi de X.

— Tout d'abord $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$
— La loi de X est donc l'application $\mathbb{P}_X : [\![1,6]\!] \to [0,1]$ définie par

$$\forall a \in [\![1,6]\!] \quad \mathbb{P}_X(a) = \mathbb{P}(\{X=a\})$$

Ces probabilités se calculent facilement ; la loi de X peut être résumée par le tableau suivant :

a	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_X(a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exercice 2. On tire 4 fois de suite à pile ou face avec une pièce non truquée, on appelle X le nombre de piles obtenus. Quelle est la loi de X ?
réponse :
On modélise l'expérience par $\Omega = \{pile, face\}^4$ muni de la probabilité uniforme.
L'ensemble des valeurs possibles de X est $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$; la loi de X est résumée par le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\{X=a\})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 3. On tire simultanément trois boules d'une urne qui contient 2 boules rouges et 5 boules blanches. Soit X le nombre de boules rouges tirées, quelle est la loi de X ?

réponse :
-Modèle : Ω est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des boules de l'urne. On le munit de la probabilité uniforme.
-Valeurs possibles de X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
-Loi :

a	0	1	2
$\mathbb{P}(\{X = a\})$	$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}$	$\frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$

Proposition 1.
★ $\sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a) = 1$

démonstration :
La famille $(\{X = a\})_{a \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements (événements deux à deux incompatibles, de réunion Ω).
§ 4. Connaître la loi de X permet de calculer la probabilité d'un événement de type $\{X \in F\}$:

Proposition 2.
■ Soit $F = \{a_1, \cdots, a_n\} \subset X(\Omega)$
★ $\mathbb{P}(\{X \in F\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_X(a_k)$

démonstration :
Il suffit d'observer que

$$\{X \in F\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X = a_k\}$$

et les termes de cette réunion sont des événements deux à deux incompatibles.
Remarque. Si F, G sont des parties *disjointes* de $X(\Omega)$, alors

$$\mathbb{P}(X \in F \cup G) = \mathbb{P}(X \in F) + \mathbb{P}(X \in G)$$

Autrement dit, l'application $\mathbf{P}_X : F \mapsto \mathbb{P}(X \in F)$ est une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$, et $(X(\Omega), \mathbf{P}_X)$ est un espace probabilisé fini (plus simple que $(\Omega, \mathbb{P})$ en pratique)
Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle, avec $X(\Omega) = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$. On appelle fonction de répartition de X l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par

$$F_X : a \mapsto \mathbb{P}(\{X \leqslant a\})$$

Enfin on note $p_k = \mathbb{P}_X(a_k)$ (loi de X)

1. Montrer que F_X est une fonction croissante.
2. Quelles sont les valeurs prises par F_X ? On les exprimera en fonction de $p_1, \cdots, p_n$
3. Cas particulier : on tire quatre fois de suite à pile ou face, on note X le nombre de piles obtenus. Calculer et représenter graphiquement F_X.

réponse :
1) Soient $a \leqslant b$ des réels. De l'inclusion $\{X \leqslant a\} \subset \{X \leqslant b\}$ on déduit $\mathbb{P}(\{X \leqslant a\}) \leqslant \mathbb{P}(\{X \leqslant b\})$, ie $F_X(a) \leqslant F_X(b)$. Donc F_X est croissante.
2) Pour $a < a_1$, $F_X(a) = 0$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $a \in [a_k, a_{k+1}[$, $F_X(a) = p_1 + \cdots + p_k$. Enfin si

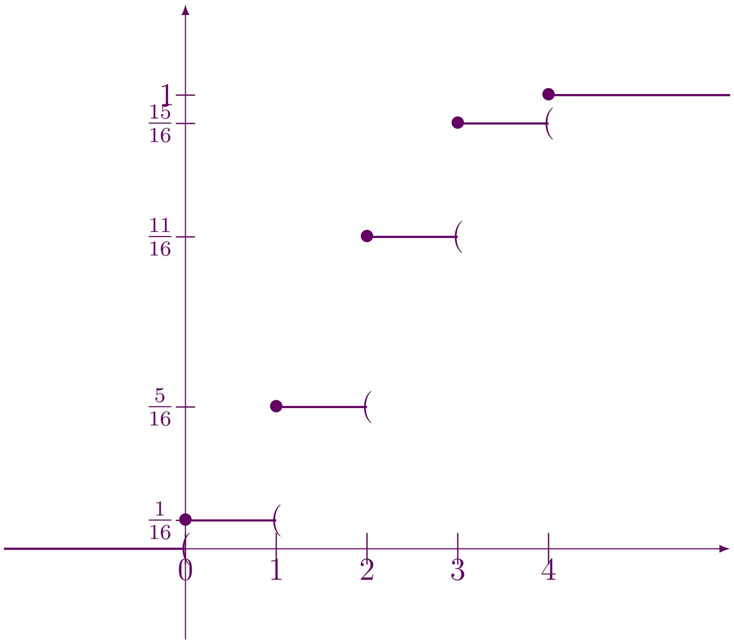
$a \geqslant a_n$ alors $F_X(a) = 1$.
3) Rappelons la loi de X (cf un des exercices précédents) :

a	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\{X = a\})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

nous en déduisons les valeurs de F_X :

$a \in$	$]-\infty, 0[$	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, +\infty[$
$\mathbb{P}(\{X \leqslant a\})$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

Graphe de F_X :



Définition 3.[comparaisons de lois]
■ Soient $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ des espaces probabilisés finis (associés à des expériences aléatoires éventuellement différentes)
■ Soient $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$ des variables aléatoires.
★ On dit que X et Y ont *même loi*, et on note $X \sim Y$, lorsque

1. $X(\Omega) = Y(\Omega')$
2. et $\forall a \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}_1(\{X = a\}) = \mathbb{P}_2(\{Y = a\})$

Remarque. Autrement dit :

$$X \sim Y \Leftrightarrow (X(\Omega_1), \mathbb{P}_X) = (Y(\Omega_2), \mathbb{P}_Y)$$

Exemple 4.

1. **Première expérience** : un joueur lance un dé ordinaire non truqué, il gagne 1 euro s'il fait 6, rien sinon. Soit X le gain du joueur. Ici $\Omega_1 = [\![1, 6]\!]$ est muni de la probabilité uniforme et la loi de X est donnée par

$$X(\Omega_1) = \{0, 1\}, \ \mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{5}{6} \text{ et } \mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{6}$$

2. **Deuxième expérience** : une urne contient 3 boules rouges et 15 boules blanches. On y effectue un tirage et on note Y le nombre de boules rouges obtenues. L'univers est l'ensemble Ω_2 des boules de l'urne, et

$$Y(\Omega_2) = \{0, 1\}, \ \mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \text{ et } \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Les variables aléatoires X et Y ont donc la même loi.

Proposition 3.
■ Soient X, Y des variables aléatoires de même loi
★ Pour tout partie F de $X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\{X \in F\}) = \mathbb{P}(\{Y \in F\})$$

démonstration :
En notant $F = \{a_1, \cdots, a_n\}$, nous avons vu que

$$\mathbb{P}(\{X \in F\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_X(a_k)$$

Or $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \in F\}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_X(a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_Y(a_k) \\ &= \mathbb{P}(\{Y \in F\})\end{aligned}$$

Exemple 5. Si $X \sim Y$ alors X et Y ont la même fonction de répartition.
§ 5. Soit $f : E \to F$ une application. Il est possible de calculer la loi de $f(X)$ si on connaît la loi de X :

Proposition 4.[loi de $f(X)$]
■ Soit $b \in f(X)(\Omega)$ une des valeurs de $f(X)$,
★ $\mathbb{P}(\{f(X) = b\}) = \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ f(a) = b}} \mathbb{P}(\{X = a\})$

démonstration :
Il suffit de constater l'égalité suivante :

$$\{f(X) = b\} = \{X \in f^{-1}(\{b\})\}$$

puis d'appliquer une des propositions précédentes (avec $F = f^{-1}(\{b\})$
Remarque. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Exercice 5. On lance un dé, un joueur gagne 2 euro s'il obtient 6, 1 euro s'il obtient 5. Par contre il perd 1 euro si le résultat est $\leqslant 2$. Il ne gagne rien dans tous les autres cas.
Soit X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire les lois de $2X + 1$ et de X^2

réponse :
1) $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$ et :

a	-1	0	1	2
$\mathbb{P}_X(a)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Notons $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$. Les lois de Y et Z se trouvent en utilisant la loi de X, sans se soucier de l'expérience aléatoire sous-jacente.
-> $Y(\Omega) = \left\{ \ 2a+1 \quad / \quad a \in X(\Omega) \ \right\} = \{-1, 1, 3, 5\}$. Les événements $\{Y = 5\}$ et $\{X = 2\}$ sont identiques, donc $\mathbb{P}_Y(5) = \mathbb{P}_X(2) = \frac{1}{6}$. On procède de même pour les autres valeurs, d'où la loi de Y :

b	-1	1	3	5
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

->$Z(\Omega) = \left\{ \ a^2 \quad / \quad a \in X(\Omega) \ \right\} = \{0, 1, 4\}$. par ailleurs on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\{Z = 0\} &= \{X = 0\}, \text{ donc } \mathbb{P}_Z(0) = \mathbb{P}_X(0) \\
\{Z = 4\} &= \{X = 2\}, \text{ donc } \mathbb{P}_Z(4) = \mathbb{P}_X(2) \\
\{Z = 1\} &= \{X = -1\} \cup \{X = 1\}, \text{ donc } \mathbb{P}_Z(1) = \mathbb{P}_X(-1) + \mathbb{P}_X(1)
\end{aligned}$$

d'où la loi de Z :

b	0	1	4
$\mathbb{P}_Z(b)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

2 Lois usuelles

§ 6. Un certain nombre de lois particulières se rencontrent fréquemment dans les applications. Cette année, les lois à connaître sont la loi uniforme (discrète), la loi de Bernoulli et la loi binomiale.
§ 7. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Définition 4.(loi uniforme discrète)
■ Soit E un ensemble *fini*.
★ On dit que X suit la loi uniforme sur E, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, lorsque

1. $X(\Omega) = E$ et
2. $\forall a \in E \quad \mathbb{P}(\{X = a\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(E)}$

Remarque. X suit une loi uniforme sur E si et seulement si la loi $\mathbb{P}_X$ de X est une fonction constante sur E.
Remarque. On évitera de confondre loi uniforme (qui est une loi de variable aléatoire) et probabilité uniforme (qui est l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par $A \mapsto \frac{card(A)}{card(\Omega)}$)
Exemple 6. On lance un dé ordinaire non truqué, et on appelle X le nombre obtenu :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$$

Exercice 6. Une urne contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches ($n \geq 2$). On effectue n tirages successifs sans remise dans l'urne, on appelle X le rang du tirage de la boule noire. Quelle est la loi de X ?

réponse :
L'univers est l'ensemble Ω des permutations de l'ensemble des boules de l'urne, muni de la probabilité uniforme.
-L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
-Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note B_k l'événement « tirer une boule blanche au tirage k ». On a donc :

$$\{X = k\} = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n$$

et (formule des probabilités composées)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2|B_1)\cdots\mathbb{P}(\overline{B_k}|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})\cdots\mathbb{P}(B_n|B_1 \cap \cdots \cap \overline{B_k} \cap \cdots \cap B_{n-1})\\ &= \frac{(n-1)!}{n!}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Le nombre $\mathbb{P}(\{X = k\})$ est indépendant de k : X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Définition 5.(loi de Bernoulli)
■ Soit $p \in [0, 1]$.
★ On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
2. $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = p$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{P}_X(0) = 1 - p$.

Exemple 7.

— On tire une fois à pile ou face avec une pièce non truquée, soit X le nombre de piles obtenus. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$
— On effectue un tirage dans une urne contenant 2 boule noire et 15 boules blanches. Soit X le nombre de boules blanches obtenues : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{15}{17})$

Définition 6.(loi binomiale)
■ Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.
★ On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p), et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, lorsque

1. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
2. $\forall k \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque. Pour $n = 1$ il s'agit de la loi de Bernoulli de paramètre p.
Remarque. On observera la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

en vertu de la formule du binôme de Newton

Exemple 8. Rappelons qu'une épreuve de Bernoulli est une expérience à deux issues "échec" et "succès". Appelons p la probabilité d'un succès.
Répétons une telle épreuve n fois de suite, dans des conditions indépendantes : cette expérience est appelée un schéma de Bernoulli, ou schéma binomial, de paramètres (n, p).
Dans ces conditions, appelons X le nombre de succès obtenus. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 7. On lance un dé ordinaire non truqué 5 fois de suite, on appelle X le nombre de "six" obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X = 2\})$, $\mathbb{P}(\{X \leqslant 2\})$ et $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\})$

réponse :
1) L'expérience s'identifie à un schéma binomial, où "succès" correspond à l'événement "obtenir un six". X compte le nombre de succès dans ce schéma, donc suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{6})$
2) $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3 = \frac{625}{3888}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \leqslant 2\}) &= \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) \\ &= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \frac{625}{648}\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant 2\}) = \frac{23}{648}$$

3 Espérance

§ 8. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Définition 7.[espérance]
★ L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le nombre

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = a\}).a$$

Remarque. $\mathbb{E}(X)$ est donc la moyenne des valeurs de X, pondérée par la loi de X.
Remarque. Deux variables aléatoires de même loi ont la même espérance.
Si $\mathbb{E}(X) = 0$ on dit que X est une variable aléatoire centrée.
Exemple 9. Si X est constante de valeur a (ie si $X(\Omega) = \{a\}$), alors $\mathbb{E}(X) = a$
Exemple 10. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(\{X = 0\}).0 + \mathbb{P}(\{X = 1\}).1 = p$$

Exercice 8. On lance un dé, un joueur gagne 2 euro s'il obtient 6, 1 euro s'il obtient 5. Par contre il perd 1 euro si le résultat est $\leqslant 2$. Il ne gagne rien dans tous les autres cas.
Soit X le gain algébrique du joueur. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
réponse :
Rappelons la loi de X : $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$ et

a	-1	0	1	2
$\mathbb{P}_X(a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{a \in \{-1,0,1,2\}} \mathbb{P}_X(a).a = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{6}$$

Exercice 9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on suppose $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$. Calculer l'espérance de X.
réponse :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\{X = k\}).k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$$

Théorème 5.
■ Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$
◆ Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
★ alors $\mathbb{E}(X) = np$

démonstration :
La définition de l'espérance et l'expression de la loi binomiale donnent :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_X(k).k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$$

Pour calculer cette somme, posons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k$. f est une fonction polynômiale de dérivée :

$$f' : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k x^{k-1}$$

en particulier $f'(1) = \mathbb{E}(X)$.
Or une autre expression de f s'obtient en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (px + 1 - p)^n$$

dont on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = np(px + 1 - p)^{n-1}$$

Par conséquent $\mathbb{E}(X) = f'(1) = np$.

Théorème 6.(formule de transfert)
■ Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.
★

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = a\}) f(a)$$

démonstration :
Par définition de l'espérance,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{b \in f(X)(\Omega)} \mathbb{P}(\{f(X) = b\}).b$$

Utilisons maintenant l'expression de la loi de $f(X)$ en fonction de la loi de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{b \in f(X)(\Omega)} \left(\sum_{a \in f^{-1}(b) \cap X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a) \right).b \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a) f(a)\end{aligned}$$

Remarque. Si X et Y ont même loi, alors $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même espérance.
Exemple 11. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Le réel $\mathbb{E}(X^k)$, appelé le moment de X d'ordre k, est égal à

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = a\}) a^k$$

Exercice 10. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(\frac{1}{(X+1)(X+2)})$ lorsque

1. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$
2. X suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, $N \in \mathbb{N}^*$.

réponse :
1) $X^2 = X$ donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) = p$. De plus

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) = \mathbb{P}_X(0).\frac{1}{2} + \mathbb{P}_X(1)\frac{1}{6} = \frac{3-2p}{6}$$

2) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_X(k).k^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\
&= \frac{1}{2(N+2)}
\end{aligned}$$

§ 9. Voyons maintenant quelques propriétés générales de l'espérance.

Lemme 7.
★ $\mathbb{E}(X) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\}) X(\alpha)$

démonstration :
Nous regroupons les termes de la somme $\sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\}) X(\alpha)$ selon la valeur de $X(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\}) X(\alpha) &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\alpha \in \Omega \\ X(\alpha) = a}} \mathbb{P}(\{\alpha\}) X(\alpha) \\
&= \sum_{a \in X(\Omega)} \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Omega \\ X(\alpha) = a}} \mathbb{P}(\{\alpha\}) \right).a \\
&= \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(\left\{ \ \alpha \in \Omega \quad / \quad X(\alpha) = a \ \right\}\right) a \\
&= \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(\{X = a\}\right) a \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Théorème 8.[propriétés de l'espérance]

■ Soient X, Y des variables aléatoires réelles sur Ω et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

★ linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

★ positivité : $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$

★ croissance : $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$

★ inégalité triangulaire : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$

★ $\min(X(\Omega)) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \max(X(\Omega))$

★ inégalité de Markov : $\forall r > 0 \quad \mathbb{P}(X \geqslant r) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{r}$

démonstration :

1) nous utilisons le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\})(\lambda X + Y)(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\})(\lambda X(\alpha) + Y(\alpha)) \\
&= \lambda \sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\}) X(\alpha) + \sum_{\alpha \in \Omega} \mathbb{P}(\{\alpha\}) Y(\alpha) \\
&= \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

2) Supposons $X \geqslant 0$, ie $\forall a \in X(\Omega),\ a \geqslant 0$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a).a \geqslant 0$$

3) On applique (2) à $Y - X$ ce qui donne $\mathbb{E}(Y - X) \geqslant 0$. Or (linéarité) $\mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)$, d'où $\mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X)$.

4)

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(X)| &= \left| \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a).a \right| \\
&\leqslant \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a).|a| \text{ (inégalité triangulaire classique)} \\
&= \mathbb{E}(|X|) \text{ (formule de transfert)}
\end{aligned}$$

5)Notons $u = min(X(\Omega))$ et $v = \max(X(\Omega))$, on a $u \leqslant X \leqslant v$ donc par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(u) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(v)$$

Or u et v sont des constantes, donc $\mathbb{E}(u) = u$ et $\mathbb{E}(v) = v$.

6) Soit $r > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|) &= \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a).|a| \\
&= \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ a < r}} \mathbb{P}_X(a).|a| + \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ a \geqslant r}} \mathbb{P}_X(a).|a| \\
&\geqslant \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ a \geqslant r}} \mathbb{P}_X(a).|a| \\
&\geqslant \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ a \geqslant r}} \mathbb{P}_X(a).r \\
&= \mathbb{P}(\{X \geqslant r\}).r
\end{aligned}$$

Remarque. Attention $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ en général.
Remarque. Si $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors l'événement $\{X = 0\}$ a une probabilité égale à 1 (ce qui ne signifie pas tout à fait que X est identiquement nulle)
Exercice 11. On lance n dés ordinaires ($n \geqslant 1$), soit X la somme des nombres obtenus.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Donner une majoration de $\mathbb{P}(\{X \geqslant 5n\})$

réponse :
1)Numérotons les dés de 1 à n et soit X_k le nombre affiché par le dé numéro k. X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$ donc $\mathbb{E}(X_k) = \frac{7}{2}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
La loi de X n'est pas évidente à calculer... mais observons que $X = X_1 + \cdots + X_n$. Donc par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = \frac{7n}{2}$$

2) Nous appliquons l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant 5n\}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{5n} = \frac{7}{10}$$

Cette estimation est très grossière. On pourra par exemple vérifier que, pour $n = 2$, et après calcul de la loi de X on trouve :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 10) = \frac{1}{6}$$

4 Variance, écart-type

§ 10. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. La variance et l'écart-type sont des nombres qui donnent une indication de la "dispersion" des valeurs de X autour de sa valeur moyenne $\mathbb{E}(X)$.

Définition 8.[variance, écart-type]
★ La variance de X est le réel (nécessairement positif)

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

★ L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque. En notant $m = \mathbb{E}(X)$ on a donc

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(a)(a - m)^2$$

Exemple 12. Si X est constante de valeur a alors $\mathbb{E}(X) = a$ et donc $\mathbb{V}(X) = 0$.
Réciproquement si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors, en notant $m = \mathbb{E}(X)$, l'événement $\{X = m\}$ a pour probabilité 1.

Proposition 9.[définition équivalente]
★ $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

démonstration :
Notons $m = \mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X-m)^2)\\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2mX + m^2)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2m\,\mathbb{E}(X) + m^2 \text{ (linéarité de l'espérance)}\\ &= \mathbb{E}(X^2) - m^2\end{aligned}$$

Exercice 12. On lance un dé, un joueur gagne 2 euro s'il obtient 6, 1 euro s'il obtient 5. Par contre il perd 1 euro si le résultat est $\leqslant 2$. Il ne gagne rien dans tous les autres cas.
Soit X le gain algébrique du joueur. Calculer $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.
Rappel : $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}$ et la loi de X est :

a	-1	0	1	2
$\mathbb{P}_X(a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{a\in\{-1,0,1,2\}} \mathbb{P}_X(a).a^2 = \frac{1}{3}\times(-1)^2 + \frac{1}{3}\times 0^2 + \frac{1}{6}\times 1^2 + \frac{1}{6}\times 2^2 = \frac{7}{6}$$

et

$$\begin{cases}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{41}{36}\\ \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \frac{\sqrt{41}}{6}\end{cases}$$

Exercice 13. Calculer la variance de X :

1. si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0,1]$
2. si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$, $N \in \mathbb{N}^*$

réponse :
1) Nous avons vu que $\mathbb{E}(X) = p$. De plus $X^2 = X$, donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) = p$. Finalement

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

2) Nous avons vu dans un exercice que $\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$ donc

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

Théorème 10.[variance d'une loi binomiale]
■ Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$
♦ On suppose $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
★ $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

démonstration :
Nous savons que $\mathbb{E}(X) = np$, il reste à calculer

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k^2$$

Comme pour l'espérance, nous introduisons la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}x^k$, et remarquons que :

$$\begin{aligned} f''(1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k(k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Par ailleurs $f(x) = (px+1-p)^n$ et $f''(x) = n(n-1)p^2(px+1-p)^{n-2}$ d'où :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) + f''(1) = np + n(n-1)p^2 = np(1+pn-p)$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = np(1+pn-p) - (np)^2 = np(1-p)$$

Théorème 11.[propriétés de la variance]
■ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
★ $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$
★ $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$
★ inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall r > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant r) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{r^2}$$

démonstration :
1)Tout d'abord $\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}\left(((aX+b) - \mathbb{E}(aX+b))^2\right) = \mathbb{E}((a^2(X-\mathbb{E}(X))^2) \\ &= a^2\,\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\,\mathbb{V}(X) \end{aligned}$$

2) Immédiat
3) On observe

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant r\} = \{(X-\mathbb{E}(X))^2 \geqslant r^2\}$$

on applique alors l'inégalité de Markov à $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$:

$$\mathbb{P}(Y \geqslant r^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{r^2}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant r) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{r^2}$$

Remarque. Si X est exprimée dans une certaine unité (mètres, euros, etc) alors $\sigma(X)$ se calcule dans la même unité ; c'est le principal avantage de $\sigma(X)$ sur $\mathbb{V}(X)$
Remarque. Une variable aléatoire X est dite réduite lorsque $\sigma(X) = 1$.
Soit X une variable aléatoire d'espérance m et d'écart-type $\sigma > 0$. Alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est une variable aléatoire centrée (ie d'espérance nulle) et réduite.

5 Couples de variables aléatoires

§ 11. Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ des variables aléatoires sur Ω.
Nous dirons que $Z = (X, Y)$ est un couple de variables aléatoires. C'est aussi une variable aléatoires sur Ω, à valeurs dans $E \times F$.
On observera que $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Définition 9.[loi conjointe, lois marginales]
★ La loi de Z :

$$\mathbb{P}_Z : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0,1] \\ (a,b) \mapsto \mathbb{P}(\{X = a \text{ et } Y = b\}) \end{cases}$$

est appelée loi conjointe du couple (X, Y)
★ Les lois de X et de Y sont appelées les lois marginales du couple (X, Y).

Remarque. Ces définitions se généralisent à un n-uplet $(X_1, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires.
Exemple 13. On choisit au hasard deux nombres entiers (éventuellement identiques) compris entre 1 et 4. Soient X et Y respectivement le plus petit et le plus grand des deux nombres choisis.
On modélise l'expérience par $\Omega = [\![1, 4]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. La loi conjointe de (X, Y) correspond au tableau à double entrée suivant (le nombre correspondant à la ligne a et la colonne b est $\mathbb{P}(\{X = a \text{ et } Y = b\})$:

$a \backslash b$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

§ 12. Il est toujours possible de calculer les lois marginales à partir de la loi conjointe :

Proposition 12.[calcul des lois marginales]
★ $\forall a \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(\{X = a\}) = \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbb{P}_Z(a, b)$
★ $\forall b \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(\{Y = b\}) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}_Z(a, b)$

démonstration :
Soit $a \in X(\Omega)$. Les événements $(\{X = a \text{ et } Y = b\})_{b \in Y(\Omega)}$ sont deux à deux incompatibles et leur union est $\{X = a\}$. Donc

$$\mathbb{P}(\{X = a\}) = \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = a \text{ et } Y = b\}) = \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbb{P}_Z(a, b)$$

L'autre formule se démontre de même.
Exemple 14. Reprenons l'exemple précédent, calculons les lois marginales de (X, Y).
Soit $a \in [\![1, 4]\!]$. Pour calculer $\mathbb{P}(\{X = a\})$, il suffit, dans le tableau donnant la loi conjointe, de sommer les nombres situés sur la ligne a. De même, la loi de Y s'obtient en sommant les termes du tableau d'une même colonne :

$a \backslash b$	1	2	3	4	$\mathbb{P}_X(a)$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	

Exercice 14. Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne, soit X le rang d'apparition de la première boule rouge et Y le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des deux premiers tirages.
Déterminer les lois conjointes et marginales du couple (X, Y).
réponse :
$X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. Les lois conjointes et marginales de (X, Y) correspondent au tableau :

$a\backslash b$	0	1	2	$\mathbb{P}_X(a)$
1	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
2	0	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	

§ 13. Attention : des lois conjointes distinctes peuvent donner des lois marginales identiques. Voir exercice suivant :
Exercice 15. On effectue deux tirages successifs dans une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. Soit X (resp. Y) la couleur obtenue au premier tirage (resp. second tirage). Déterminer les lois conjointes et marginales de (X, Y) pour

1. Un tirage successif avec remise
2. Un tirage successif sans remise

réponse :
1) tirage avec remise :

$a\backslash b$	*blanc*	*noir*	$\mathbb{P}_X(a)$
blanc	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
noir	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	

2) tirage sans remise :

$a\backslash b$	*blanc*	*noir*	$\mathbb{P}_X(a)$
blanc	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
noir	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	

Les lois marginales sont les mêmes pour les deux expériences, mais pas les lois conjointes
§ 14. Voici un exemple d'application de la loi conjointe :

Proposition 13.
♦ On suppose X, Y à valeurs réelles.
★ La loi de $X + Y$ s'obtient à partir de la loi conjointe $\mathbb{P}_Z$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(\{X + Y = a\}) = \sum_{\substack{(u,v) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ u+v=a}} \mathbb{P}_Z(u, v)$$

démonstration :
Il suffit d'observer que $X + Y = f(Z)$ où f est la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto u + v \end{cases}$. On utilise alors une des propriétés de la partie I.

Remarque. On peut généraliser : pour toute fonction $f : E \times F \to G$, la loi de $f(X, Y)$ peut se déduire de la loi conjointe de X, Y.

Exercice 16. On tire simultanément deux boules d'une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) nombre obtenu.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y)
2. En déduire la loi de $X + Y$.

réponse :
1)$X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, $Y(\Omega) = [\![2, 4]\!]$ et :

$a \backslash b$	2	3	4	$\mathbb{P}_X(a)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	

2) Il est clair que $(X + Y)(\Omega) \subset [\![3, 7]\!]$. De plus pour tout $k \in [\![3, 7]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X+Y}(k) = \sum_{a+b=k} \mathbb{P}_Z(a, b)$$

d'où la loi de $X + Y$:

k	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}_{X+Y}(k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

6 Loi conditionnelle, indépendance

§ 15. Rappelons qu'étant donnés deux événements A, B, avec $\mathbb{P}(B) > 0$:

— La probabilité conditionnelle de A sachant B est $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

— A et B sont dits indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Nous allons étendre ces définitions à un couple de variables aléatoires.

§ 16. Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ des variables aléatoires sur Ω et $Z = (X, Y)$ le couple correspondant.

Définition 10.[loi conditionnelle]
■ Soit $b \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{Y = b\}) > 0$.
★ La loi conditionnelle de X sachant $\{Y = b\}$ est l'application :

$$\mathbb{P}_{X|\{Y=b\}} : \begin{cases} X(\Omega) \to [0, 1] \\ a \mapsto \mathbb{P}(\{X = a\}|\{Y = b\}) \end{cases}$$

Remarque. En appliquant la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{X|Y=b}(a) = \frac{\mathbb{P}_Z(a, b)}{\mathbb{P}_Y(b)}$$

On peut aussi réécrire la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}_Z(a, b) = \mathbb{P}_Y(b).\,\mathbb{P}_{X|Y=b}(a)$$

Remarque. La somme des valeurs de $\mathbb{P}_{X|\{Y=b\}}$ est égale à 1.
Remarque. Étant fixé $a \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{X=a\}) > 0$, on définit de même la loi conditionnelle de Y sachant $\{X=a\}$ par

$$\forall b \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}_{Y|X=a}(b) = \mathbb{P}(\{Y=b\}|\{X=a\}) = \frac{\mathbb{P}_Z(a,b)}{\mathbb{P}_X(a)}$$

Exemple 15. On tire successivement avec remise deux boules d'une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit X le plus petit et Y la somme des deux nombres tirés.
Les lois conjointes et marginales de (X,Y) sont données par :

$a \backslash b$	2	3	4	5	6	7	8	$\mathbb{P}_X(a)$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{7}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{5}{16}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	

La loi conditionnelle de X sachant $\{Y=4\}$ s'obtient en divisant les valeurs de la colonne $b=4$ de ce tableau par $\mathbb{P}_Y(4) = \frac{3}{16}$:

a	1	2
$\mathbb{P}_{X|Y=4}(a)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

La loi conditionnelle de Y sachant $\{X=1\}$ s'obtient en divisant les valeurs de la ligne $a=4$ de ce tableau par $\mathbb{P}_X(1) = \frac{7}{16}$:

b	2	3	4	5
$\mathbb{P}_{Y|X=1}(b)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

Exercice 17. On tire 4 fois de suite à pile ou face avec une pièce non truquée. Soit X le nombre de "piles" obtenus et Y le nombre maximal de piles consécutifs. (exemples : pour le tirage "ppfp", $X=3$ et $Y=2$. pour le tirage "pfpf", $X=2$ et $Y=1$) Calculer les lois conjointes et marginales de (X,Y), puis la conditionnelle de X sachant $\{Y=1\}$.
réponse :
lois conjointe et marginales de (X,Y)

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	$\mathbb{P}_X(a)$
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{4}{16}$	0	0	0	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{6}{16}$
3	0	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}_Y(b)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	

loi de X sachant $\{Y=1\}$:

a	1	2
$\mathbb{P}_{X|Y=1}(a)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Définition 11.[variables aléatoires indépendantes]
★ On dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $(a,b) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les événements $\{X=a\}$ et $\{Y=b\}$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\{X=a \text{ et } Y=b\}) = \mathbb{P}(\{X=a\}).\,\mathbb{P}(\{Y=b\})$$

Remarque. En cas d'indépendance, les lois conditionnelles du couple (X,Y) coincident avec les lois marginales.

Exemple 16. Si X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

Exemple 17. On lance deux fois de suite un dé ordinaire non truqué, soit X (resp. Y) le premier (resp. second) numéro obtenu. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 18. On lance trois dés, on appelle X et Y le nombre de "un" et de "six" respectivement obtenus. Étudier l'indépendance de X et Y.

réponse :

$$\mathbb{P}(X=0).\,\mathbb{P}(Y=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

et

$$\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=0) = \left(\frac{4}{6}\right)^3$$

donc $\mathbb{P}(X=0 \text{ et } Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0).\,\mathbb{P}(Y=0)$: X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 19. X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$ et la loi uniforme sur $\{-2,-1,0,1,2\}$. Déterminer la loi conjointe de (X,Y) puis la loi de XY.

réponse :

1) L'hypothèse d'indépendance permet de calculer la loi conjointe à partir des lois marginales :

$$\forall (a,b) \in \{-1,0,1\} \times \{-2,-1,0,1,2\} \quad \mathbb{P}_Z(a,b) = \mathbb{P}_X(a)\,\mathbb{P}_Y(b) = \frac{1}{3}.\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

On observera que Z suit la loi uniforme sur $\{-1,0,1\} \times \{-2,-1,0,1,2\}$.

2) D'abord $(XY)(\Omega) \subset [\![-2, 2]\!]$ et pour tout $k \in (XY)(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(XY=k) = \sum_{ab=k} \mathbb{P}_Z(a,b)$$

d'où la loi de XY :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}_{XY}(k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

Théorème 14.
⧫ Si X et Y sont indépendantes alors
★ pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants
★ Pour toutes applications $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

démonstration :
1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(a,b)\in A\times B}\{X=a \text{ et } Y=b\}\right)\\
&= \sum_{(a,b)\in A\times B}\mathbb{P}_Z(a,b)\\
&= \sum_{(a,b)\in A\times B}\mathbb{P}_X(a)\,\mathbb{P}_Y(b) \quad (\text{indépendance de } X \text{ et } Y)\\
&= \sum_{a\in A}\mathbb{P}_X(a)\sum_{b\in B}\mathbb{P}_Y(b)\\
&= \mathbb{P}(\{X\in A\}).\,\mathbb{P}(\{Y\in B\})
\end{aligned}$$

2) Soient a une valeur de $f(X)$ et b une valeur de $g(Y)$. On a les relations entre événements :

$$\{f(X)=a\}=\{X\in f^{-1}(a)\} \text{ et } \{g(Y)=a\}=\{Y\in g^{-1}(b)\}$$

D'après le premier point, ces deux événements sont indépendants.

Exemple 18. On lance deux dés, soient X et Y les nombres obtenus. X et Y sont indépendantes, donc nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P}(\{X\leqslant 3 \text{ et } Y\neq 1\})=\mathbb{P}(\{X\leqslant 3\}).\,\mathbb{P}(\{Y\neq 1\})=\frac{1}{2}.\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$$

et nous pouvons affirmer que les variables aléatoires e^X et Y^2+1 sont indépendantes.

§ 17. La notion d'indépendance se généralise à une famille $(X_1,\cdots,X_n)$ de variables aléatoires sur Ω :

Définition 12.[indépendance mutuelle]
★ Les variables aléatoires $(X_1,\cdots,X_n)$ sont dites *mutuellement indépendantes* lorsque pour toutes valeurs $a_1\in X_1(\Omega),\cdots,a_n\in X_n(\Omega)$, les événements $(\{X_j=a_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.
★ Les variables aléatoires $(X_1,\cdots,X_n)$ sont dites deux à deux indépendantes lorsque pour tous entiers positifs $i\neq j$, X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes.

Remarque. En cas d'indépendance mutuelle :
- Toute sous-famille de $(X_1,\cdots,X_n)$ est mutuellement indépendante
- Soient $p<q$ et soient $f:E_1\times\cdots\times E_p\to E'$ et $g:E_{p+1}\times\cdots\times E_q\to E''$ des applications. Les variables aléatoires $f(X_1,\cdots,X_p)$ et $g(X_{p+1},\cdots,X_q)$ sont indépendantes.
- il y a indépendance deux à deux.

Attention l'indépendance deux à deux n'entraine pas l'indépendance mutuelle.

Exemple 19. On joue 10 fois de suite à pile ou face, soit X_j le résultat du lancer numéro j. Alors $(X_1,\cdots,X_{10})$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Exemple 20. On lance un dé 10 fois de suite. Soit X_i le nombre de "six" obtenu au lancer numéro i, Y (resp. Z) le nombre de "six" obtenus lors des trois premiers (resp. les quatre derniers) lancers.
- Les variables $(X_1,\cdots,X_{10})$ sont mutuellement indépendantes
- $Y=X_1+X_2+X_3$ et $Z=X_7+X_8+X_9+X_{10}$ sont donc indépendantes.

Théorème 15.(espérance et variance en cas d'indépendance)
♦ Si X et Y sont indépendantes, alors
★ $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$
★ $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

démonstration :
1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k\in(XY)(\Omega)} \mathbb{P}(\{XY=k\})k \\
&= \sum_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=a \text{ et } Y=b\})ab \\
&= \sum_{(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=a\}).\,\mathbb{P}(\{Y=b\})ab \quad \text{(indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{a\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=a\}).a \sum_{b\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{Y=b\}).b \\
&= \mathbb{E}(X).\,\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\,\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - (\mathbb{E}(Y))^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \text{ (d'après le premier point)}
\end{aligned}$$

Remarque. Plus généralement la variance d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes est égale à la somme de leurs variances.
Exercice 20. On lance un dé n fois de suite, soit S la somme des nombres obtenus. Calculer l'espérance et la variance de S.
réponse :
On observe que $S = X_1 + \cdots + X_n$ où X_i est le nombre affiché par le dé au i-ième lancer. $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$: nous avons déjà calculé leur espérance et leur variance :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \\ \mathbb{V}(X_i) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} \end{cases}$$

Par conséquent :
-par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{7n}{2}$$

-en vertu de l'indépendance mutuelle de $X_1, \cdots, X_n$,

$$\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \frac{35n}{12}$$

Théorème 16.[sommes de variables aléatoires binomiales indépendantes]
■ Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$.
♦ On suppose que X, Y sont indépendantes de lois $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
★ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$

démonstration :
Soit $k \in (X+Y)(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X+Y=k\}) &= \sum_{a+b=k} \mathbb{P}_Z(a,b) \\
&= \sum_{a=0}^{k} \mathbb{P}_Z(a,k-a) \\
&= \sum_{a=0}^{k} \mathbb{P}_X(a)\,\mathbb{P}_Y(k-a) \text{ (indépendance de } X \text{ et } Y) \\
&= \sum_{a=0}^{k} \binom{m}{a} p^a (1-p)^{m-a} \binom{n}{k-a} p^{k-a}(1-p)^{n-(k-a)} \text{ (expression de la loi binomiale)} \\
&= \sum_{a=0}^{k} \binom{m}{a}\binom{n}{k-a} p^k (1-p)^{m+n-k}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{a=0}^{k} \binom{m}{a}\binom{n}{k-a} = \binom{m+n}{k}$ (exercice classique sur les coefficients binomiaux), donc $\mathbb{P}(\{X+Y = k\}) = \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}$.

Théorème 17.
■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
★ $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

démonstration :
par récurrence sur n, en exploitant la proposition précédente.

Exercice 21. En utilisant le théorème précédent, retrouver l'expression de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

réponse :
La loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être modélisée par la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus lors d'un schéma binomial avec n répétitions, et p la probabilité d'un succès.
Appelons X_i le nombre de succès lors de l'expérience numéro i. Nous observons que :
-> X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. En particulier $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1-p)$ pour tout indice i.
-> $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes
-> $X = X_1 + \cdots + X_n$
Nous en déduisons

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = np$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$$