Chapitre 21 - Espaces préhilbertiens

Table des matières

§ 1. Dans ce chapitre, nous formalisons les notions intuitives d'orthogonalité et de distance de la géométrie usuelle. Nous travaillerons avec des espaces vectoriels (souvent de dimension finie 2 ou 3, mais pas toujours !) avec une nouvelle "opération" appelée produit scalaire.
Cette théorie, issue de la géométrie élémentaire, a aussi de nombreuses applications en analyse : calcul intégral, séries, etc
§ 2. Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel non nul et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (l'hypothèse $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est essentielle dans ce chapitre !)

1 Produit scalaire

Définition 1. (produit scalaire sur E)
★ Un produit scalaire sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie toutes les conditions suivantes :

1. linéarité à gauche : $\forall (x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{R} \quad b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$
2. linéarité à droite : $\forall (x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{R} \quad b(x, y + \lambda z) = b(x, y) + \lambda b(x, z)$
3. symétrie : $\forall (x, y) \in E^2 \quad b(x, y) = b(y, x)$
4. positivité : $\forall x \in E \quad b(x, x) \geqslant 0$
5. séparation : $\forall x \in E \quad b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

★ Le couple (E, b) est alors appelé un espace préhilbertien réel, ou encore espace euclidien lorsque E est de dimension finie.

Remarque. Une application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ linéaire à gauche et à droite est dite bilinéaire.
Si b est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche de b pour en déduire la bilinéarité.
Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel de E et b un produit scalaire sur E, alors la restriction de b à F est un produit scalaire sur F
Notation. Le nombre $b(x, y)$, appelé produit scalaire de x et y, sera souvent noté $< x, y >$, $(x|y)$ ou $x.y$.
§ 3. L'exemple suivant, issu de la géométrie classique du plan et de l'espace, est fondamental :

Définition 2.[produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$]
■ Pour tous $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ notons

$$(x \mid y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

★ L'application $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé *produit scalaire canonique.*

démonstration :
Soient $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ et $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
1) linéarité à gauche :

$$\begin{aligned}(x + \lambda y \mid z) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k) z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \\ &= (x \mid z) + \lambda (y \mid z)\end{aligned}$$

2) symétrie : $(y \mid x) = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x \mid y)$
3) positivité : $(x \mid x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ (somme de nombres positifs)
4) séparation : supposons $(x \mid x) = 0$, ie $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$. Or tous les termes de cette somme nulle sont positifs, donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k^2 = 0$$

donc $x = (x_1, \cdots, x_n) = 0$.

Exemple 1. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}$ (cas $n = 1$) est la multiplication usuelle.
Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ est donné par

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \quad ((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique, et on pose $x = (1, -1, 1)$ et $y = (1, 5, 2)$. Calculer $(x \mid y)$, $(x \mid x)$ et $(y \mid y)$

réponse :
$(x \mid y) = 1 \times 1 - 1 \times 5 + 1 \times 2 = -2$
$(x \mid x) = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$
$(y \mid y) = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30$

Remarque. Il est possible de définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$:

Exercice 2. Montrer que l'application $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_1 + 2 x_2 y_2$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

réponse :
La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de difficultés. Montrons que b a les propriétés de positivité et de séparation. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:
-positivité : $b(x, x) = 2x_1 x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0$
-séparation : si on suppose $b(x, x) = 0$, alors $(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0$, donc (somme nulle de nombres positifs) $x_1 + x_2 = x_2 = 0$, donc $x_1 = x_2 = 0$, donc $x = 0$.
L'application b est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

§ 4. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On définit un produit scalaire, encore appelé canonique, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$(A \mid B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ij}$$

Exercice 3. Avec les notations précédentes, montrer que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad (A \mid B) = \mathrm{Tr}(A^T.B)$$

réponse :
$A^T.B$ est une matrice carrée d'ordre p, de trace :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^T.B) &= \sum_{k=1}^{p} [A^T.B]_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} [A^T]_{k,i} [B]_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,k} [B]_{i,k} \\ &= (A \mid B) \end{aligned}$$

§ 5. Voyons maintenant d'autres exemples de produits scalaires qui n'ont pas de lien évident avec la géométrie usuelle :

Proposition 1.[produit scalaire intégral]
■ Soient $a < b$ des réels et $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
★ L'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f,g) \in E^2 \quad b(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur E

démonstration à connaître :
Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
1) linéarité à gauche :

$$\begin{aligned} b(f+\lambda g, h) &= \int_a^b (f(t)+\lambda g(t))h(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)h(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)h(t) \\ &= b(f,h) + \lambda b(g,h) \end{aligned}$$

2) symétrie : $b(g,f) = \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = b(f,g)$
3) positivité : $b(f,f) = \int_a^b f(t)^2 dt \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive)
4) séparation : supposons $b(f,f) = 0$, ie $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. La fonction f^2 est positive et *continue* sur $[a,b]$, d'intégrale nulle, donc

$$\forall t \in [a,b] \quad f(t)^2 = 0$$

donc $f = 0$.
Exemple 2. Prenons $a = 0$, $b = 1$, $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto \sin(\pi t)$, calculons par exemple

$$\begin{aligned} b(f,g) &= \int_0^1 \sin(\pi t)dt = \frac{2}{\pi} \\ b(f,f) &= \int_0^1 dt = 1 \\ b(g,g) &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient $a < b$, montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \varphi(P,Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$$

Préciser la valeur de $\varphi(X^p, X^q)$ lorsque $a = 0$, $b = 1$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
réponse :
1) -La bilinéarité, la symétrie et la positivité se prouvent comme dans la proposition précédente.
- Montrons la séparation. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, ie $\int_a^b P(t)^2 dt = 0$. La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[a,b]$, d'intégrale nulle, donc

$$\forall t \in [a,b] \quad P(t)^2 = 0$$

donc $\forall t \in [a,b] \quad P(t)=0$. En particulier le polynôme P a une infinité de racines (tous les points de l'intervalle $[a,b]$), donc $P=0$
2) $\varphi(X^p, X^q) = \int_0^1 t^{p+q} dt = \frac{1}{p+q+1}$
Exercice 5. Soient $a_0, \cdots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(b_k)$$

Montrer que l'application φ ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
réponse :
Là encore la bilinéarité, la symétrie et la positivité ne présentent pas de difficulté.
Vérifions la séparation. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P,P)=0$, ie $\sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$. Tous les termes de cette somme nulle sont positifs, donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(a_k)^2 = 0$$

donc $a_0, \cdots, a_n$ sont des racines de P. Or ces racines sont deux à deux distinctes, au nombre de $n+1$; de plus $\deg(P) \leqslant n$. Donc $P=0$.
§ 6. Dans tout le reste de ce chapitre on se donne un espace préhilbertien $(E, (. \mid .))$.

2 Norme, écart angulaire, distance

Définition 3.(norme préhilbertienne, vecteur unitaire)
■ Soit $x \in E$.
★ La norme de x est définie par

$$\| x \| := \sqrt{(x \mid x)}$$

★ x est dit unitaire lorsque $\| x \| = 1$.

Exemple 3.
- $\| 0_E \| = 0$
- Soit $a = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$: $\| a \| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ est unitaire.
- Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont unitaires.
- Dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

on a, pour tout entier k, $\left\| \mathrm{X}^k \right\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. Le vecteur X^k n'est donc pas unitaire...

Proposition 2.
■ Soient $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$
★ $\| x \| \geqslant 0$
★ $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
★ $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

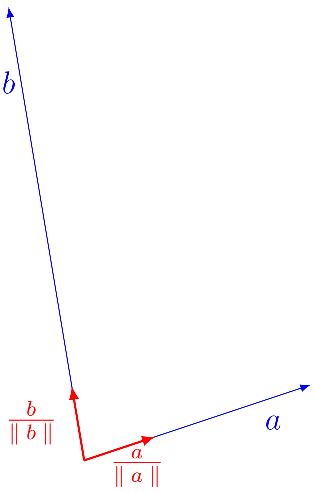
démonstration :
1) c'est la positivité du produit scalaire

2) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow (x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (séparation)
3) On utilise la bilinéarité du produit scalaire :

$$\| \lambda x \|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda^2 (x \mid x) = \lambda^2 \| x \|^2$$

Remarque. Soit $a \in E \setminus \{0\}$.
- Le vecteur $\frac{1}{\| a \|}.a$, aussi noté $\frac{a}{\| a \|}$, est unitaire. Intuitivement c'est le vecteur de norme 1 qui a « même direction et même sens » que a
- Si a est unitaire, alors $-a$ aussi.

§ 7. Illustration : deux vecteurs non nuls a, b. Les vecteurs $\frac{a}{\| a \|}$ et $\frac{b}{\| b \|}$ sont unitaires.



Exercice 6. On suppose $\dim(E) = 1$. Montrer que E contient exactement deux vecteurs unitaires opposés l'un de l'autre.
réponse :
Soit (e) une base de E, autrement dit $e \in E \setminus \{0\}$ et $E = Vect(e)$. Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda e$ et $\| x \| = 1$. On a donc

$$\| \lambda e \| = 1 \text{ donc } |\lambda| = \frac{1}{\| e \|} \text{ donc } \lambda \in \{-\frac{1}{\| e \|}, \frac{1}{\| e \|}\}$$

On trouve bien deux vecteurs unitaires dans E :

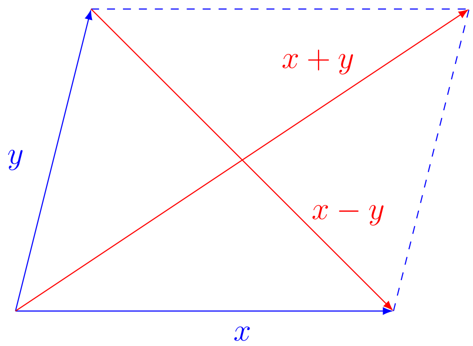
$$\frac{e}{\| e \|} \text{ et } -\frac{e}{\| e \|}$$

Proposition 3.(identités remarquables)
■ $\forall (x, y) \in E^2$,
★ $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2 (x \mid y) + \| y \|^2$
★ $\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - 2 (x \mid y) + \| y \|^2$
★ $(x \mid y) = \frac{1}{2} \left(\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 \right)$ (formule de polarisation)
★ $(x \mid y) = \frac{1}{2} \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2 \right)$ (formule de polarisation)
★ $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$ (formule du parallélogramme)

démonstration :
1)

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= (x + y \mid x + y) \\ &= (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \quad \text{(bilinéarité du p.s.)} \\ &= \| x \|^2 + 2 (x \mid y) + \| y \|^2 \\ &\text{(définition de la norme et symétrie du p.s.)} \end{aligned}$$

2) Il suffit de remplacer y par $-y$ dans (1)
3) et (4) : conséquences faciles de (1) et (2)
(5) : il suffit d'ajouter les formules (1) et (2).
§ 8. Illustration : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés



Remarque. Les identités remarquables se généralisent facilement : pour tous vecteurs $e_1, \cdots, e_p$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| e_i \|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (e_i \mid e_j)$$

Exercice 7. On suppose $n \geqslant 2$. $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Calculer $\| 1 \|$, $\| X \|$, $(1 \mid X)$ et $\| 1 + 2X \|$
réponse :
$\| 1 \|^2 = (1 \mid 1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ donc $\| 1 \| = \sqrt{n+1}$. On observera que, pour ce produit scalaire, le polynôme 1 n'est pas unitaire !
$\| X \|^2 = (X \mid X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $\| X \| = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.
$(1 \mid X) = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Enfin on calcule $\| 1 + 2X \|$ en utilisant une des identités remarquables :

$$\begin{aligned} \| 1 + 2X \|^2 &= \| 1 \|^2 + 4\,(1 \mid X) + 4 \| X \|^2 \\ &= (n+1) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \end{aligned}$$

donc $\| 1 + 2X \| = \sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}}$

Théorème 4.[inégalités remarquables]
■ Soient $x, y \in E$.
★ On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\,(x \mid y)\,| \leqslant \|\, x \,\|\, \|\, y \,\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.
★ On a l'inégalité dite de Minkowski, ou triangulaire :

$$\|\, x + y \,\| \leqslant \|\, x \,\| + \|\, y \,\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, c'est-à-dire $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\; y = \lambda x$

démonstration :
1) -La propriété est évidente pour $y = 0$.
-Supposons maintenant $y \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on observe que

$$0 \leqslant \|\, x + \lambda y \,\|^2 = \|\, x \,\|^2 + 2\,(x \mid y)\,\lambda + \|\, y \,\|^2\,\lambda^2$$

La fonction polynôme de degré 2

$$P : \lambda \mapsto \|\, x \,\|^2 + 2\,(x \mid y)\,\lambda + \|\, y \,\|^2\,\lambda^2$$

est donc de signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$. Par conséquent son discriminant est inférieur ou égal à 0 :

$$\begin{aligned} & 4\,(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \\ \text{donc} \quad & (x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 \\ \text{donc} \quad & |\,(x \mid y)\,| \leqslant \|x\|\|y\| \end{aligned}$$

-L'égalité a lieu si et seulement si le discriminant de P est nul, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad P(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\, x + \lambda y \,\|^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = -\lambda y \\ \Leftrightarrow & (x, y) \text{ est liée} \end{aligned}$$

2) -Partons de l'identité

$$\|\, x + y \,\|^2 = \|\, x \,\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|\, y \,\|^2$$

et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\, x + y \,\|^2 \leqslant \|\, x \,\|^2 + 2\,\|\, x \,\| . \|\, y \,\| + \|\, y \,\|^2 = (\|\, x \,\| + \|\, y \,\|)^2$$

donc $\|\, x + y \,\| \leqslant \|\, x \,\| + \|\, y \,\|$.
-L'égalité a lieu si et seulement si

$$\begin{aligned} & (x \mid y) = \|\, x \,\|\,\|\, y \,\| \\ \Leftrightarrow\, & (x \mid y) \geqslant 0 \text{ et } |\,(x \mid y)\,| = \|\, x \,\|\,\|\, y \,\| \\ \Leftrightarrow\, & (x \mid y) \geqslant 0 \text{ et } (x, y) \text{ liée} \end{aligned}$$

Si $x = 0$ il n'y a plus rien à démontrer ; sinon la dernière condition s'écrit

$$\begin{aligned} &\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \text{ et } (x \mid \lambda x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow &\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \text{ et } \lambda \parallel x \parallel^2 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow &\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ y = \lambda x \end{aligned}$$

Corollaire 5.[inégalité triangulaire 2]
★ Pour tous $(x, y) \in E^2$,

$$| \parallel x \parallel - \parallel y \parallel | \leqslant \parallel x - y \parallel$$

démonstration :
L'inégalité de Minkowski appliquée a $x - y$ et y donne :

$$\parallel x \parallel = \parallel x - y + y \parallel \leqslant \parallel x - y \parallel + \parallel y \parallel$$

donc $\parallel x \parallel - \parallel y \parallel \leqslant \parallel x - y \parallel$. En échangeant les rôles de x et y nous obtenons

$$\parallel y \parallel - \parallel x \parallel \leqslant \parallel y - x \parallel = \parallel x - y \parallel$$

d'où le résultat.

§ 9. Voici quelques exemples d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Exemple 4. Avec $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, et deux vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

ou de façon équivalente

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2).(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

L'égalité a lieu si et seulement si (x, y) est liée.
Dans le cas particulier $y = (1, 1, \cdots, 1)$ on retrouve une inégalité classique sur les moyennes :

$$\left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Exemple 5. Avec $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire intégral, on obtient, pour toutes fonctions f, g continues sur $[0, 1]$,

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right) \cdot \left(\int_0^1 g^2\right)$$

Exercice 8. Démontrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\left(\int_{-1}^1 t^2P(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{2}{5}\int_{-1}^1 P(t)^2dt$$

Préciser pour quels polynômes il s'agit d'une égalité.

réponse :
-Posons $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Soient $P \in E$ et $Q = X^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à ces deux vecteurs donne

$$\begin{aligned} &| (P \mid Q) |^2 \leqslant \| P \|^2 \| Q \|^2 \\ \text{donc } &\left(\int_{-1}^{1} P(t)t^2 dt \right)^2 \leqslant \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \int_{-1}^{1} t^4 dt \\ \text{donc } &\left(\int_{-1}^{1} P(t)t^2 dt \right)^2 \leqslant \frac{2}{5} \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \end{aligned}$$

qui est l'inégalité attendue.
- L'égalité a lieu lorsque les vecteurs P et Q sont colinéaires, ie pour $P = \lambda X^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
§ 10. Étant donnés deux vecteurs non nuls x et y, le nombre

$$\frac{(x \mid y)}{\| x \| \| y \|}$$

est, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, compris entre -1 et 1. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

Définition 4.(écart angulaire)
■ Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.
★ L'écart angulaire de (x, y) est le nombre $\arccos\left(\frac{(x|y)}{\| x \| \| y \|}\right)$

Remarque. L'écart angulaire de x et y est donc l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$(x \mid y) = \| x \| \| y \| \cos(\theta)$$

On observera que θ ne change pas si on multiplie x et y par des réels strictement positifs, ou si on permute x et y.
Exemple 6. Dans $\mathbb{R}^2$ on pose

$$x = (0, -2), \quad y = (3, 3)$$

on calcule

$$\| x \| = 2, \ \| y \| = 3\sqrt{2} \text{ et } \ (x \mid y) = -6$$

donc

$$\frac{(x \mid y)}{\| x \| \| y \|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

L'écart angulaire de (x, y) est $\frac{3\pi}{4}$
Exercice 9. Soit θ l'écart angulaire de deux vecteurs non nuls x, y. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$) (resp. $\theta = \frac{\pi}{2}$)
réponse :
$\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{(x|y)}{\| x \| \| y \|} = \cos(0) \Leftrightarrow (x \mid y) = \| x \| \| y \|$. Il s'agit d'un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui se produit si et seulement si x et y sont positivement liés.
$\theta = \pi \Leftrightarrow \frac{(x|y)}{\| x \| \| y \|} = \cos(\pi) \Leftrightarrow -(x \mid y) = \| x \| \| y \|$. Il s'agit encore d'un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui se produit si et seulement si x et y sont négativement liés.
$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{(x|y)}{\| x \| \| y \|} = \cos(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (x \mid y) = 0$. Cette situation se produit lorsque x et y sont orthogonaux (voir plus loin)

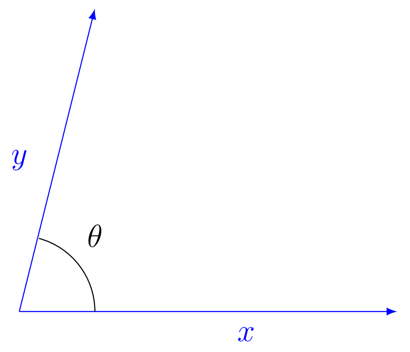
Exercice 10. Comparer l'écart angulaire de (x, y) et celui de $(-x, y)$.
réponse :
Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire de (x, y) :

$$(x \mid y) = \| x \| \| y \| \cos(\theta)$$

donc

$$(-x \mid y) = -(x \mid y) = -\| x \| \| y \| \cos(\theta) = \| -x \| \| y \| \cos(\pi - \theta)$$

Or $\pi - \theta \in [0, \pi]$, donc l'écart angulaire de $-x$ et y est $\pi - \theta$.
Remarque. On peut montrer (et nous l'admettrons) que l'écart angulaire correspond à la mesure, en radians, de l'angle non orienté défini par les vecteurs x et y.



Définition 5.[distance de deux vecteurs]
■ Soient $(x, y) \in E^2$.
★ La distance de x à y est le réel positif

$$d(x, y) = \| y - x \|$$

Exemple 7. Soient $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, 2, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique,

$$d(a, b) = \| b - a \| = \| (0, 1, 2) \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Exercice 11. Calculer $d(1 + X, X^2)$ où $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

réponse :

$$\begin{aligned} d(1 + X, X^2)^2 &= \left\| X^2 - X - 1 \right\|^2 \\ &= \left\| X^2 \right\|^2 + \| X \|^2 + \| 1 \|^2 - 2\left(X^2 \mid X\right) - 2\left(X^2 \mid 1\right) + 2\left(X \mid 1\right) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 2 - 2 \times 0 - 2 \times \frac{2}{3} + 2 \times 0 \\ &= \frac{26}{15} \end{aligned}$$

donc $d(1 + X, X^2) = \sqrt{\dfrac{26}{15}}$

Proposition 6.
■ Soient $(x, y, z) \in E^3$, la fonction distance a les propriétés suivantes :
★ séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
★ symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$
★ invariance par translation : $d(x + z, y + z) = d(x, y)$
★ inégalité triangulaire : $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

démonstration :
Conséquences des propriétés semblables de la norme.

3 Orthogonalité

Définition 6.
■ Soient $(x, y) \in E^2$.
★ On dit que x et y sont *orthogonaux* et on note $x \perp y$ lorsque

$$(x \mid y) = 0$$

Exemple 8.
— Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur
— Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux.

Exemple 9.
— Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, les vecteurs $a = (1, -1, 1)$ et $b = (2, 3, 1)$ sont orthogonaux.
— Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}\,t$$

on peut observer que

$$(3X - 2 \mid X) = \int_0^1 (3t - 2).tdt = 0$$

donc $3\,\mathrm{X} - 2$ et X sont orthogonaux.

Remarque. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur écart angulaire est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12. Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à la fois à e_1 et à e_2, où

$$e_1 = (1, -1, 2) \text{ et } e_2 = (-2, 3, 1)$$

réponse :
Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur a est orthogonal à e_1 et e_2 si et seulement si

$$\begin{cases} (a \mid e_1) = 0 \\ (a \mid e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z \\ y = -5z \end{cases} \Leftrightarrow a = (-5z, -7z, z)$$

Les solutions sont donc les vecteurs de la droite $\mathrm{Vect}((-5, -7, 1))$.

Proposition 7.
■ Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in R^2$.
★ $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$
★ $x \perp x \Leftrightarrow x = 0_E$
★ $x \perp y$ et $x \perp z \Rightarrow x \perp (\alpha y + \beta z)$

démonstration :
1) On utilise la symétrie du produit scalaire
2) On utilise la propriété de séparation du produit scalaire : $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
3) Supposons $(x \mid y) = (x \mid z) = 0$. Utilisons la bilinéarité du produit scalaire

$$(x \mid \alpha y + \beta z) = \alpha (x \mid y) + \beta (x \mid z) = 0$$

donc $x \perp (\alpha y + \beta z)$.
Remarque. Étant donné $a \in E$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à a est un sous-espace vectoriel de E. C'est aussi le noyau de l'application linéaire $x \mapsto (a \mid x)$.
§ 11. Il est possible d'étendre la relation d'orthogonalité à des sous-espaces vectoriels :

Définition 7.
■ Soit $a \in E$ et soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
★ On dit que a est orthogonal à F lorsque $\forall x \in F \quad (a \mid x) = 0$
★ On dit que F et G sont orthogonaux lorsque $\forall (x, y) \in F \times G \quad (x \mid y) = 0$
★ L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F est un sous-espace vectoriel de E appelé l'orthogonal de F, noté $F^\perp$:

$$F^\perp = \left\{ \ x \in E \quad / \quad \forall y \in F \quad (x \mid y) = 0 \ \right\}$$

Exemple 10.
— 0_E est orthogonal à tout sous-espace de E
— $\{0_E\}^\perp = E$.
— $E^\perp = \{0_E\}$.
— Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \left\{ \ (x, y, 0) \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \right\}$. Alors $F^\perp = \left\{ \ (0, 0, z) \quad / \quad z \in \mathbb{R} \ \right\}$.

Remarque. F et G sont orthogonaux $\Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$.
Autrement dit $F^\perp$ est le plus grand sous-espace de E qui est orthogonal à F.
Remarque. Attention, deux plans de $\mathbb{R}^3$ ne sont jamais orthogonaux ! Par exemple avec les plans de coordonnées :

$$F = \left\{ \ (x, y, 0) \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \right\} \text{ et } G = \left\{ \ (x, 0, z) \quad / \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \ \right\}$$

Le vecteur $a = (1, 0, 0)$ appartient à la fois à F et à G. Cependant $(a \mid a) = 1 \neq 0$...
Sur cet exemple on peut tout de même dire que les sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$ sont des droites orthogonales (on dit que F et G sont perpendiculaires)
Exercice 13. Montrer que :

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2. $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$
3. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

solution :
1) Supposons $F \subset G$, et soit $x \in G^\perp$. Soit $y \in F$. Comme $F \subset G$, alors $y \in G$. Or $x \in G^\perp$, donc $(x \mid y) = 0$. C'est vrai pour tout $y \in F$, donc $x \in F^\perp$. Donc $G^\perp \subset F^\perp$.
2) $F \subset F + G$ donc (premier point) $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même $(F+G)^\perp \subset G^\perp$. Donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$
3) $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
On peut montrer, en utilisant le théorème de projection (voir plus loin) qu'en dimension finie les formules (2) et (3) sont des égalités.

Proposition 8.(orthogonal et famille génératrice)
■ Soient $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ et $x \in E$
★ Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. x est orthogonal à $Vect(e_1, \cdots, e_p)$
2. $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad (x \mid e_i) = 0$

démonstration :
- Supposons $x \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)^\perp$. Alors x est orthogonal à tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. En particulier x est orthogonal aux vecteurs $e_1, \cdots, e_p$.
- Réciproquement supposons

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad (x \mid e_k) = 0$$

Alors x est orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_p$, donc $x \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)^\perp$.

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^3$ posons $e = (1, -2, 3)$ et $F = \text{Vect}(e)$. Déterminons une base de $F^\perp$. Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} a \in F^\perp &\Leftrightarrow (a \mid e) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0 \end{aligned}$$

donc

$$F^\perp = \left\{ \ (2y - 3z, y, z) \quad / \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2 \ \right\} = \text{Vect}(u, v)$$

avec $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-3, 0, 1)$. La famille (u, v) est une base de $F^\perp$.
Exercice 14. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

on pose $F = \mathbb{R}_1[X]$. Déterminer une base de $F^\perp$.
réponse :
Une base de F est $(1, X)$. Donc pour tout $P = a + bX + cX^2 \in E$,

$$\begin{aligned} P \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (P \mid 1) = 0 \\ (P \mid X) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 P(t)dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 tP(t) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 6a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = a - 6aX + 6aX^2 \end{aligned}$$

donc $F^\perp = Vect(1 - 6X + 6X^2)$

Proposition 9.
★ $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
★ $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

démonstration :
1)Soit $x \in F \cap F^{\perp}$. Alors $(x \mid x) = 0$, donc $x = 0_E$.
2)Il suffit d'observer que tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$.

§ 12. Nous verrons qu'en dimension finie, les sous-espaces F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

4 Familles et bases orthogonales

Définition 8.
■ Soit $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$
★ La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est dite *orthogonale* lorsque les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (i \neq j) \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$$

★ La famille est dite *orthonormale* lorsqu'elle est orthogonale et si de plus tous les vecteurs de la famille sont unitaires :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$$

Exemple 12.
— Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormale.
— Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ et $(0,2,-2)$ forment une famille orthogonale mais pas orthonormale.
— Soit $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ orthogonale et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Alors la famille $(\lambda_1 e_1, \cdots, \lambda_p e_p)$ est orthogonale.

Remarque. Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, alors la famille :

$$\left(\frac{e_1}{\| e_1 \|}, \cdots, \frac{e_p}{\| e_p \|} \right)$$

est une famille orthonormale.

Proposition 10.
★ Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier toute famille orthonormale) est libre.

démonstration :
Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Soient $\lambda_1, \cdots \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0_E$$

Soit $i \in [\![1, p]\!]$ fixé. On a

$$\begin{aligned} 0 = (e_i \mid 0_E) &= \left(e_i \mid \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_i \mid e_k) \\ &= \lambda_i \| e_i \|^2 \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est orthogonale. Comme $e_i \neq 0$ on a donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre.

Remarque. Si E est de dimension finie n, une famille orthogonale (resp. orthonormale) de n vecteurs non nuls est donc une base, dite base orthogonale (resp. base orthonormale) de E.

Exemple 13. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique).

Exercice 15. Vérifier que les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1), \quad e_2 = \frac{1}{3}(2, -1, 2), \quad e_3 = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$$

forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$

réponse :

On calcule :

$$(e_1 \mid e_2) = \frac{1}{9}(2 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2) = 0$$
$$\| e_1 \|^2 = (e_1 \mid e_1) = \frac{1}{9}(2^2 + 2^2 + (-1)^2) = 1$$

et on vérifie de même $(e_1 \mid e_3) = (e_2 \mid e_3) = 0$ et $\| e_2 \|^2 = \| e_3 \|^2 = 1$. Donc (e_1, e_2, e_3) est une famille orthonormale. Enfin $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc cette famille est une base orthonormale.

Exercice 16. Soient $a_0, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts. $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ on définit les polynômes de Lagrange :

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

1. Expliciter ces polynômes quand $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$.
2. Montrer que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

réponse :

1)

$$L_0 = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$$
$$L_1 = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} = -(X-1)(X-3)$$
$$L_2 = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$$

2) Observons d'abord que pour tous $i, k \leqslant n$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases} = \delta_{i,k}$$

Par conséquent pour tous $i, j \leqslant n$,

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}$$

La famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille orthonormale de $n+1$ vecteurs. Or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, donc $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale.

Théorème 11.(de Pythagore)
■ Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$
♦ Si $(e_1, \dots, e_p)$ est orthogonale,
★ alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| e_i \|^2$$

démonstration :
Appliquons l' identité remarquable :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| e_i \|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (e_i \mid e_j)$$

Or la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est orthogonale, donc pour tous $i < j$, $(e_i \mid e_j) = 0$.
Remarque. La réciproque est vraie pour $p = 2$ (mais pas pour $p \geqslant 3$)

Théorème 12.[de la base orthonormale incomplète]
♦ On suppose E de dimension finie (espace euclidien).
★ Toute famille orthonormale de E peut être complétée en base orthonormale.
★ E a des bases orthonormales.

démonstration :
1) Par récurrence sur $n = \dim(E)$.
-Si $n = 1$: soit $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = Vect(a)$. Alors le vecteur $b = \frac{a}{\| a \|}$ constitue une base orthonormale de E.
-Supposons la propriété démontrée au rang $n-1$, et soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille orthonormale de E $(p < n)$. Par hypothèse de récurrence on peut la compléter en une famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_{n-1})$. Soit maintenant $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$ et posons

$$b = a - \sum_{k=1}^{n-1} (a \mid e_k) . e_k$$

Ce vecteur est non nul et, pour tout $j \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}
(b \mid e_j) &= (a \mid e_j) - \sum_{k=1}^{n-1} (a \mid e_k) . (e_k \mid e_j) \\
&= (a \mid e_j) - \sum_{k=1}^{n-1} (a \mid e_k) \delta_{k,j} \\
&= (a \mid e_j) - (a \mid e_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc, avec $e_n = \frac{b}{\| b \|}$, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale de n vecteurs de E.
2)On applique le premier point à partir de la famille vide.
Remarque. Lorsque $\dim(E) \geqslant 2$, E a une infinité de bases orthonormales.
§ 13. L'utilisation d'une base orthonormale facilite grandement les calculs de coordonnées, de produits scalaires et de distances :

Théorème 13.(calculs dans une base orthonormale)

♦ E est supposé de dimension finie n.

■ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base *orthonormale* de E.

■ Soient $(x, y) \in E^2$, de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ danss la base $\mathcal{B}$.

★ $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k = (e_k \mid x)$

★ $x = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k \mid x) \, e_k$

★ $\| \, x \, \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$

★ $(x \mid y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$

démonstration :

1) Soient $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les coordonnées de x dans B. On a donc $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Donc pour tout $i \leqslant n$,

$$(x \mid e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid e_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (e_k \mid e_i) = \lambda_i$$

2) Immédiat

3) Appliquons le théorème de Pythagore :

$$\| \, x \, \|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x) \, e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| \, (e_k \mid x) \, e_k \, \|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)^2$$

4) Calculons :

$$\begin{aligned}(x \mid y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k x_l \, (e_k \mid e_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\end{aligned}$$

Exercice 17. Vérifier que les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \;\; e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \; e_3 = (0, 0, -1)$$

forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Calculer rapidement les coordonnées de $x = (-2, 3, 5)$ dans cette base.

réponse :

On vérifie facilement que la famille proposée est orthonormale. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ c'est donc une base orthonormale.

Les coordonnées de x dans $B = (e_1, e_2, e_3)$ sont données par :

$$M_B(x) = \begin{pmatrix} (x \mid e_1) \\ (x \mid e_2) \\ (x \mid e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Soit E un plan vectoriel muni d'une base orthonormale (i, j). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_\theta = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j \text{ et } v_\theta = (-\sin\theta)i + (\cos\theta)j$$

Montrer que (u_θ, v_θ) est une base orthonormale de E.

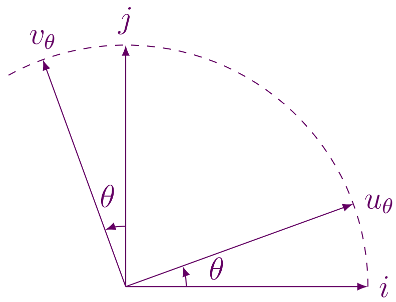
réponse :

La base (i, j) est orthonormale, donc

$$\begin{aligned}(u_\theta \mid v_\theta) &= -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0\\ \| u_\theta \|^2 &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\\ \| v_\theta \|^2 &= (-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = 1\end{aligned}$$

La famille (u_θ, v_θ) est donc bien une base orthonormale de E.

Les vecteurs u_θ et v_θ s'obtiennent à partir de i et j par une rotation d'angle θ :



Exercice 19. Soient $a_0, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts, et $L_0, \cdots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés (voir un des exercices précédents).

1. Montrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k).L_k$$
2. Application (interpolation de Lagrange) : soit $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall k \leqslant n \quad P(a_k) = b_k$$
et donner son expression en fonction des polynômes $L_0, \cdots, L_n$

réponse :

1)On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P \mid Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$, de sorte que $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base orthonormale de E. Par conséquent, pour tout $P \in E$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (P \mid L_k)\, L_k = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$$

2) D'après la première question,

$$(\forall k \leqslant n \quad P(a_k) = b_k) \Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$$

Le problème a bien une unique solution, en l'occurrence le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k$.

Théorème 14.(passage entre deux bases orthonormales)
■ Soient $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et $B' = (f_1, \cdots, f_n)$ des bases orthonormales de E et soit P la matrice de passage de B à B'.
★ $P = ((e_i \mid f_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
★ $P^{-1} = P^T$
★ $\det(P) \in \{-1, 1\}$

démonstration :
1) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ième colonne de P est formée des coordonnées de f_j dans la base B. Comme B est orthonormale, ces coordonnées sont $((e_i \mid f_j))_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
2) P^{-1} est la matrice de passage de B' vers B. Donc son coefficient d'indice (i, j) est $(f_i \mid e_j) = (e_j \mid f_i)$. Donc $P^{-1} = P^T$.
3) Nous avons $P.P^T = I_n$ donc en prenant le déterminant,

$$\det(P)^2 = 1 \text{ donc } \det(P) \in \{-1, 1\}.$$

5 Projections orthogonales

§ 14. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Rappelons qu'une projection sur F est un endomorphisme u de E tel que $u^2 = u$ et $\mathrm{Im}(u) = F$. Si $F \neq E$, et $F \neq \{0\}$, il existe une infinité de projections sur F (caractérisées par leur noyau $\mathrm{Ker}(u)$.
Sous certaines hypothèses, il est possible de définir une projection particulière, dite orthogonale, sur F :

Théorème 15.[de projection sur un sous-espace de dimension finie]
♦ On suppose F de dimension finie.
★ Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$
★ $(F^\perp)^\perp = F$
★ Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in F^\perp$$

Le vecteur y (resp. z) est appelé le projeté orthogonal de x sur F (resp. sur $F^\perp$), noté $p_F(x)$ (resp $p_{F^\perp}(x)$)

démonstration :
(1) et (3) : Nous avons vu que F et $F^\perp$ sont en somme directe, il reste à montrer que $E = F + F^\perp$. Soit $x \in E$. Comme F est de dimension finie, alors F a une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$. Posons

$$y = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k \text{ et } z = x - y$$

Il est immédiat que $y \in F$ et $y + z = x$. Montrons que $z \in F^\perp$. Pour tout $j \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
(z \mid e_j) = (x - y \mid e_j) &= (x \mid e_j) - (y \mid e_j) \\
&= (x \mid e_j) - \left(\sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k \mid e_j \right) \\
&= (x \mid e_j) - \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, (e_k \mid e_j) \\
&= (x \mid e_j) - \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, \delta_{k,j} \\
&= (x \mid e_j) - (e_j \mid x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $z \in F^\perp$.

2) Nous avons vu que $F \subset (F^\perp)^\perp$.
Inversement soit $x \in (F^\perp)^\perp$. D'après (3) nous pouvons écrire

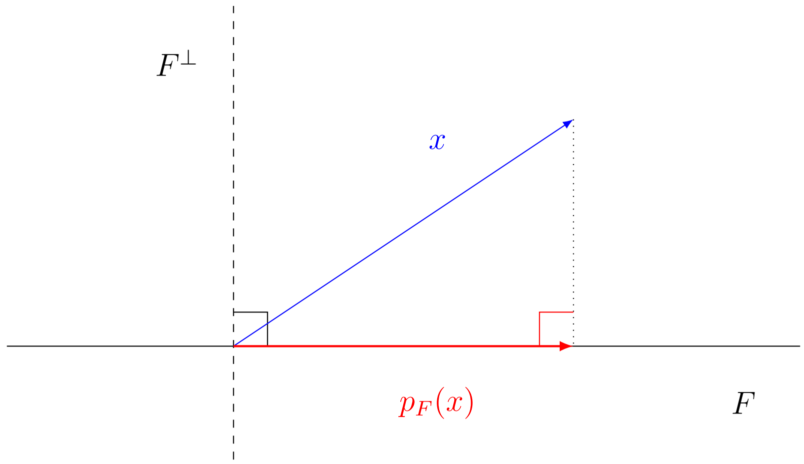
$$x = y + z$$

avec $(y,z) \in F \times F^\perp$. Or $x \in (F^\perp)^\perp$, $y \in F$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$, donc $x - y \in (F^\perp)^\perp$. Or $x - y = z \in F^\perp$. Donc

$$x - y \in F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$$

Finalement $x = y$ et $x \in F$. Donc $(F^\perp)^\perp \subset F$.

§ 15. Illustration : projection orthogonale d'un vecteur x sur un sous-espace F :



Remarque. p_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. C'est donc l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$p_F^2 = p_F,\ \mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(p_F) = F$$

De plus

$$p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$$

Remarque. Le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ donne :

$$\| p_F(x) \|^2 + \| x - p_F(x) \|^2 = \| x \|^2$$

Remarque. Un projecteur p est orthogonal si et seulement si les sous-espaces $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux.

Exemple 14. $p_{\{0_E\}} = 0$, $p_E = \mathrm{Id}_E$

Définition 9.
♦ On suppose F de dimension finie.
★ La symétrie orthogonale par rapport à F est l'endomorphisme

$$s_F := p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \mathrm{Id}_E$$

Remarque. s_F est donc la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Exercice 20. Montrer que $\forall x \in E \quad \| s_F(x) \| = \| x \|$ *(on dit que s_F est une isométrie)*

réponse :
Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\| s_F(x) \|^2 &= \| p_F(x) - p_{F^\perp}(x) \|^2 \\ &= \| p_F(x) \|^2 + \| -p_{F^\perp}(x) \|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &= \| p_F(x) \|^2 + \| p_{F^\perp}(x) \|^2 \\ &= \| p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &= \| x \|^2\end{aligned}$$

§ 16. Voyons maintenant comment calculer concrètement une projection orthogonale :

Théorème 16.(calcul de la projection avec une base orthonormale)
♦ On suppose F de dimension finie et muni d'une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_p)$.
★ Pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i)\, e_i$$

démonstration :
Cette formule a été obtenue dans la démonstration du théorème de projection.
Remarque. La formule s'étend à une base *orthogonale* $(e_1, \cdots, e_p)$ de F sous la forme :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x \mid e_i)}{\| e_i \|^2}.e_i$$

En revanche il n'y a pas de formule simple pour une base quelconque de F...
Exercice 21. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On pose $e_1 = (1,1,0,0), e_2 = (0,0,1,-2)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Écrire la matrice de p_F dans la base canonique $\mathcal{B}$

réponse :
1)La famille (e_1, e_2) est une base de F. De plus $(e_1 \mid e_2) = 0$. Donc les vecteurs

$$f_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) \qquad f_2 = \frac{e_2}{\| e_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,-2)$$

forment une base orthonormale de F.
2) Notons $\mathcal{B} = (i, j, k, \ell)$. Comme (f_1, f_2) est une base orthonormale de F, nous avons l'expression de p_F :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad p_F(x) = (x \mid f_1)\, f_1 + (x \mid f_2)\, f_2$$

Pour obtenir la matrice de p_F dans $\mathcal{B}$, il suffit de calculer les images des vecteurs i, j, k, ℓ par p_F. Nous trouvons :

$$\begin{aligned}p_F(i) &= (i \mid f_1)\, f_1 + (i \mid f_2)\, f_2 = \frac{1}{2}(1,1,0,0) \\ p_F(j) &= (j \mid f_1)\, f_1 + (j \mid f_2)\, f_2 = \frac{1}{2}(1,1,0,0) \\ p_F(k) &= (k \mid f_1)\, f_1 + (k \mid f_2)\, f_2 = \frac{1}{5}(0,0,1,-2) \\ p_F(\ell) &= (\ell \mid f_1)\, f_1 + (\ell \mid f_2)\, f_2 = \frac{-2}{5}(0,0,1,-2)\end{aligned}$$

d'où

$$M_{\mathcal{B}}(p_F) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

§ 17. Deux cas particuliers seront fréquemment rencontrés en exercices : les projections sur une droite ($\dim(F) = 1$) et sur un hyperplan ($\dim(F) = \dim(E) - 1$). L'étude des hyperplans fera l'objet de la partie suivante. Pour une droite on a la formule suivante :

Théorème 17.(formule de projection sur une droite)
■ Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $x \in E$.
★ $p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \dfrac{(x \mid a)}{\| a \|^2}.a$

démonstration :
Il suffit de constater que (a) est une base orthogonale de $F = \mathrm{Vect}(a)$, et de lui appliquer la formule générale.
Exercice 22. Dans $\mathbb{R}^4$, calculer le projeté orthogonal de $(1, 0, 2, 3)$ sur $Vect((-1, 2, 1, 1))$.
réponse :
On applique la formule précédente avec $x = (1, 0, 2, 3)$ et $a = (-1, 2, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} p_{Vect((-1,2,1,1))}(x) &= \frac{(x \mid a)}{\| a \|^2}.a \\ &= \frac{4}{7}(-1, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

§ 18. Les projections orthogonales "diminuent les distances" :

Théorème 18.[inégalité de Bessel]
♦ F est supposé de dimension finie.
★ On a l'inégalité de Bessel :

$$\forall x \in E \quad \| p_F(x) \| \leqslant \| x \|$$

avec égalité si et seulement si $x \in F$.
★ $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(p_F(x), p_F(y)) \leqslant d(x, y)$

démonstration :
1) On a vu (conséquence du théorème de Pythagore) l'égalité :

$$\| x \|^2 = \| p_F(x) \|^2 + \| x - p_F(x) \|^2$$

On en déduit $\| x \|^2 \geqslant \| p_F(x) \|^2$, avec égalité si et seulement si $\| x - p_F(x) \|^2 = 0$, ie $x = p_F(x)$, ie $x \in F$.
2) Il suffit d'appliquer (1) au vecteur $y - x$.
Exercice 23. Soit $(x, y) \in E^2$, $y \neq 0$. En appliquant l'inégalité de Bessel à la projection de x sur $Vect(y)$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz
réponse :
L'inégalité de Bessel s'écrit

$$\left\| p_{Vect(y)}(x) \right\| \leqslant \| x \|$$

Or $p_{Vect(y)}(x) = \frac{(x|y)}{\| y \|^2}.y$, donc

$$\left\| p_{Vect(y)}(x) \right\| = \left\| \frac{(x \mid y)}{\| y \|^2}.y \right\| = \frac{|\,(x \mid y)\,|}{\| y \|}$$

Finalement nous obtenons

$$\frac{|\,(x \mid y)\,|}{\| y \|} \leqslant \| x \|$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque. On peut montrer qu'un projecteur p vérifiant

$$\forall x \in E \quad \| p(x) \| \leqslant \| x \|$$

est forcément un projecteur orthogonal.

6 projection sur un hyperplan, vecteur normal

Théorème 19.(formule de projection sur un hyperplan)

♦ On suppose E de dimension finie $n > 0$.

■ Soit H un hyperplan de E, ie un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Soit $x \in E$.

★ Il existe un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$ orthogonal à H. Un tel vecteur est appelé un *vecteur normal* de H.

★ $H^\perp = Vect(a)$

★ $p_H(x) = x - p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = x - \dfrac{(x \mid a)}{\| a \|^2}.a$

démonstration :

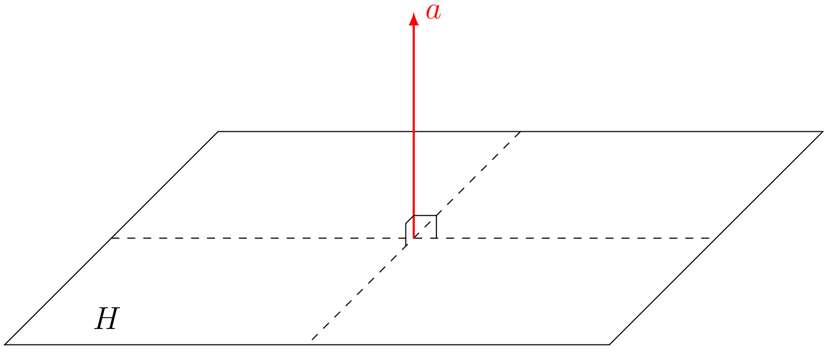
1) $\dim(H) = n-1$ donc $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = 1$. Il suffit donc de prendre $a \in H^\perp \setminus \{0\}$.

2) $H^\perp$ a pour dimension 1, donc (a) est une base de $H^\perp$.

3) On utilise $p_H = \mathrm{Id}_E - p_{H^\perp}$, et l'expression d'une projection orthogonale sur une droite.

§ 19. Illustration :

un vecteur a normal d'un plan H de $\mathbb{R}^3$



Remarque. Il suffit donc de connaître un vecteur normal pour calculer p_H, ce qui évite d'avoir à calculer une base orthonormale de H.

Remarque. Un vecteur normal n'est pas forcément unitaire... En revanche il doit être non nul.

Un hyperplan possède exactement deux vecteurs normaux unitaires, opposés l'un de l'autre.

Exemple 15. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $e_1 = (1,0,3), e_2 = (-1,2,0)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Calculons le projeté orthogonal d'un vecteur quelconque $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur F :

— F est un plan de $\mathbb{R}^3$. Cherchons un vecteur $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ normal à F :

$$\begin{cases} (a \mid e_1) = 0 \\ (a \mid e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \gamma = -\frac{2}{3}\beta \end{cases}$$

Nous pouvons choisir le vecteur $a = (6, 3, -2)$

— Appliquons le théorème précédent :

$$\begin{aligned} p_F(u) &= u - \frac{(u \mid a)}{\parallel a \parallel^2}.a \\ &= (x, y, z) - \frac{6x + 3y - 2z}{49}.(6, 3, -2) \\ &= \frac{1}{49}(13x - 18y + 12z, -18x + 40y + 6z, 12x + 6y + 45z) \end{aligned}$$

Exercice 24. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on peut définir leur produit vectoriel $x \wedge y = (z_1, z_2, z_3)$ par :

$$z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que le vecteur $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y
2. Si (x, y) est libre, montrer que $x \wedge y$ est un vecteur normal au plan $Vect(x, y)$

réponse :
1) On calcule :

$$\begin{aligned} (x \mid x \wedge y) &= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ (développement selon la première colonne)} \\ &= 0 \text{ (deux colonnes identiques)} \end{aligned}$$

donc x et $x \wedge y$ sont orthogonaux. On procède de même pour montrer que $y \perp x \wedge y$.
2) $x \wedge y$ est orthogonal à $Vect(x, y)$, il suffit donc de montrer que $x \wedge y \neq 0$. Soit $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que (x, y, t) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Adaptons le calcul fait dans la première question :

$$(t \mid x \wedge y) = \begin{vmatrix} t_1 & x_1 & y_1 \\ t_2 & x_2 & y_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \det_B(t, x, y) \neq 0$$

Nous en déduisons $x \wedge y \neq 0$

§ 20. Voici une autre propriété remarquable des hyperplans des espaces euclidiens :

Théorème 20.(de représentation des formes linéaires)
♦ E est supposé de dimension finie.
■ Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur E.
★ Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E \quad f(x) = (a \mid x)$$

★ Si $f \neq 0$ alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan et a en est un vecteur normal.

démonstration :
1)Soit $a \in E$, et soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E. Puisque les applications f et $x \mapsto (a \mid x)$ sont linéaires, nous avons :

$$(\forall x \in E \; f(x) = (a \mid x)) \Leftrightarrow (\forall k \in [\![1, n]\!] \;\; f(e_k) = (a \mid e_k))$$

Or les nombres $(a \mid e_k)$ sont les coordonnées de a dans la base B :

$$a = \sum_{k=1}^{n} (a \mid e_k)\, e_k$$

On en déduit bien un unique vecteur a qui a la propriété souhaitée, à savoir

$$a = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) e_k$$

2) Supposons $f \neq 0$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan (conséquence du théorème du rang) et $a \neq 0$. De plus

$$\forall x \in H \quad (a \mid x) = f(x) = 0$$

donc $a \in H^{\perp}$.
Remarque. Le vecteur a se calcule facilement avec une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de E : ses coordonnées dans cette base sont $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.
Exemple 16. Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons le plan H d'équation $x - 2y + 5z = 0$, ie

$$H = \left\{ \; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x - 2y + 5z = 0 \; \right\}$$

On observe que $H = \mathrm{Ker}(f)$ où f est la forme linéaire $f : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 5z$.
Sur cet exemple la représentation de f est immédiate :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = ((1, -2, 5) \mid (x, y, z))$$

On en déduit que $(1, -2, 5)$ est un vecteur normal de H
Exercice 25. $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

On pose $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P'(0)$

1. Vérifier que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f(P) = (A \mid P)$ (on pourra utiliser les polynômes de Lagrange, cf un des exercices précédents)
3. En déduire $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad P'(0) = aP(0) + bP(1) + cP(2)$$

réponse :
1) laissé en exercice.
2) L'existence et l'unicité de A sont assurés par le fait que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie. Pour le calculer utilisons une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$; nous avons vu (voir un exercice précédent) que les polynômes de Lagrange conviennent :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$$
$$L_1 = \frac{(X(X-2)}{(1-0)(1-2)} = -X(X-2)$$
$$L_2 = \frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}X(X-1)$$

d'où

$$
\begin{aligned}
A &= f(L_0)L_0 + f(L_1)L_1 + f(L_2)L_2 \\
&= -\frac{3}{2}L_0 + 2L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\
&= -3X^2 + \frac{13}{2}X - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

3) Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$
\begin{aligned}
P'(0) = f(P) = (A \mid P) &= A(0)P(0) + A(1)P(1) + A(2)P(2) \\
&= -\frac{3}{2}P(0) + 2P(1) - \frac{1}{2}P(2)
\end{aligned}
$$

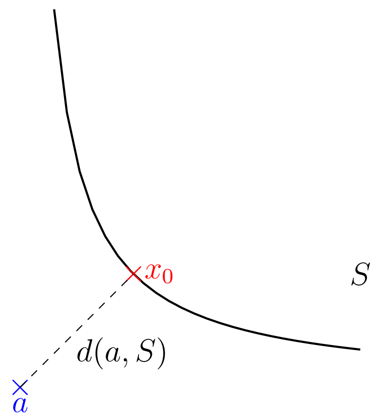
7 distance d'un vecteur à un sous-espace

Définition 10.
■ Soit $a \in E$ et soit $S \subset E$ un sous-ensemble non vide de E
★ On définit la distance de a à S par :

$$d(a, S) := \inf_{x \in S} \| x - a \|$$

Remarque. Cette borne inférieure n'est pas toujours un minimum.

§ 21. Illustration : distance d'un vecteur a (représenté par un point) à un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^2$: sur ce dessin la distance $d(a, S)$ est réalisée en un point particulier x_0 de S



§ 22. La distance à un sous-ensemble n'est pas toujours facile à calculer. Il existe cependant une formule remarquable lorsque S est un sous-espace vectoriel :

Théorème 21.(projection orthogonale et distance)
■ Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et soit $a \in E$
★ Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(a, x_0) = d(a, F)$; x_0 est le projeté orthogonal de a sur F.
★ $d(a, F) = \| a - p_F(a) \|$

démonstration :
Notons $x_0 = p_F(a)$ et soit $x \in F$.
-> $x_0 \in F$, donc $\| a - x_0 \| \geqslant d(a, F)$.
-> Les vecteurs $x_0 - x \in F$ et $a - x_0 \in F^{\perp}$ sont orthogonaux, donc par le théorème de Pythagore :

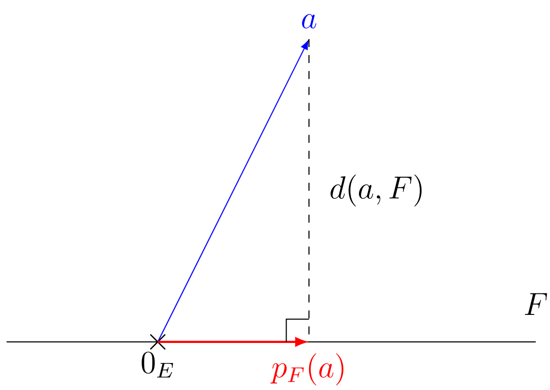
$$\| a - x \|^2 = \| a - x_0 \|^2 + \| x_0 - x \|^2 \geqslant \| a - x_0 \|^2$$

avec égalité si et seulement si $\| x_0 - x \|^2 = 0$, ie $x = x_0$. Par conséquent :

$$d(a, F) = \inf_{x \in F} \| a - x \| \geqslant \| a - x_0 \|$$

Finalement $d(a, F) = \| a - x_0 \| = \| a - p_F(a) \|$.

§ 23. Illustration :



Remarque. On a aussi $d(a, F) = \| p_{F^{\perp}}(a) \| = \sqrt{\| a \|^2 - \| p_F(a) \|^2}$

Exemple 17. Dans $\mathbb{R}^3$, calculons la distance de $a = (1, 1, 0)$ à la droite $D = Vect(b)$ où $b = (-2, 1, 3)$.

— Le projeté orthogonal de a sur $Vect(b)$ est

$$p_{Vect(b)}(a) = \frac{(a \mid b)}{\| b \|^2}.b = \frac{-1}{14}.(-2, 1, 3)$$

— La distance cherchée est donc

$$\begin{aligned} d(a, Vect(b)) &= \left\| a - p_{Vect(b)}(a) \right\| \\ &= \left\| (1, 1, 0) + \frac{1}{14}(-2, 1, 3) \right\| \\ &= \left\| \frac{3}{14}(4, 5, 1) \right\| \\ &= \frac{3\sqrt{42}}{14} \end{aligned}$$

Exercice 26. $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$

réponse :
Nous avons besoin du projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$; calculons par exemple une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.
Utilisons par exemple le raisonnement suivant (en attendant l'algorithme de Gram-Schmidt, voir plus

loin) Puisque $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, il suffit de trouver deux vecteurs orthogonaux non nuls. Posons par exemple $e_1 = 1$ et cherchons $e_2 = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $e_1 \perp e_2$:

$$(e_1 \mid e_2) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (at+b)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + b = 0$$

On peut donc poser $e_2 = 2X - 1$. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ est donc (f_1, f_2) où :

$$f_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = 1$$
$$f_2 = \frac{e_2}{\| e_2 \|} = \sqrt{3}(2X-1)$$

Nous pouvons maintenant calculer :

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \left(X^2 \mid f_1\right) f_1 + \left(X^2 \mid f_2\right) f_2 = X - \frac{1}{6}$$

et

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| X^2 - X + \frac{1}{6} \right\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

Proposition 22.[distance à un hyperplan]
♦ E est supposé de dimension finie
■ Soit H un hyperplan de E, muni d'un vecteur normal u. Soit $a \in E$
★ $d(a, H) = \dfrac{|(a \mid u)|}{\| u \|}$

démonstration :

$$d(a, H) = \| a - p_H(a) \| = \left\| \frac{(a \mid u)}{\| u \|^2}.u \right\| = \frac{|(a \mid u)|}{\| u \|}$$

Exercice 27. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x + y - 2z + 3t = 0$ et soit $a = (1, -1, 0, -1)$, calculer $d(a, H)$
réponse :
De l'équation de H nous déduisons le vecteur normal $u = (1, 1, -2, 3)$. par conséquent

$$\begin{aligned} d(a, H) &= \frac{|(a \mid u)|}{\| u \|} \\ &= \frac{|-3|}{\sqrt{15}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

8 Algorithme de Gram-Schmidt

§ 24. L'algorithme de Gram-Schmidt permet de construire une famille orthonormale à partir d'une famille libre quelconque de E. C'est une méthode efficace pour construire une base orthonormale d'un espace euclidien.

Théorème 23.(orthonormalisation de Gram-Schmidt)

■ Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.

★ Il existe une unique famille *orthogonale* $(g_1, \ldots, g_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \begin{cases} \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(g_1, \ldots, g_k) \text{ et} \\ (e_k \mid g_k) = \| g_k \|^2 \end{cases}$$

★ Il existe une unique famille *orthonormale* $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \begin{cases} \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \text{ et} \\ (e_k \mid f_k) > 0 \end{cases}$$

démonstration :
1)Par récurrence sur n.
->$n = 1$: étant donné $e_1 \in E \setminus \{0\}$, il s'agit de trouver $g_1 \in E$ tel que

$$\begin{aligned} & Vect(e_1) = Vect(g_1) \text{ et } (e_1 \mid g_1) = \| g_1 \|^2 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \ g_1 = \lambda e_1 \text{ et } (e_1 \mid \lambda e_1) = \| \lambda e_1 \|^2 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \ g_1 = \lambda e_1 \text{ et } \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow & g_1 = e_1 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$ avec $g_1 = e_1$.
-> Supposons la propriété établie au rang $n-1$, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre. Soit $(g_1, \cdots, g_{n-1})$ la famille orthogonale associée à $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ (hypothèse de récurrence). On a donc

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(g_1, \ldots, g_k) \text{ et } (e_k \mid g_k) = \| g_k \|^2$$

Il reste à déterminer g_n. Remarquons que $F = Vect(e_1, \cdots, e_{n-1})$ est un hyperplan de $Vect(e_1, \cdots, e_n)$, donc son orthogonal a pour dimension 1.
En posant

$$h = p_{F^\perp}(e_n)$$

le vecteur g_n cherché est de la forme $g_n = \lambda h$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il reste la condition

$$(e_n \mid g_n) = \| g_n \|^2 \Leftrightarrow (e_n \mid \lambda h) = \| \lambda h \|^2 \Leftrightarrow (e_n \mid h) = \lambda (h \mid h)$$

Or, en remarquant que $e_n - h$ et h sont orthogonaux :

$$(e_n \mid h) = (e_n - h + h \mid h) = (e_n - h \mid h) + (h \mid h) = \| h \|^2$$

On obtient finalement $\lambda = 1$ et $g_n = h$. La propriété est donc vraie au rang n.
2) Soit $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille orthonormale qui convient. La condition

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}(g_1, \ldots, g_k) = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$$

impose l'existence de réels non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad f_k = \lambda_k g_k$$

Avec ces notations, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} & \| f_k \| = 1 \text{ et } (f_k \mid e_k) > 0 \\ \Leftrightarrow & |\lambda_k|. \| g_k \| = 1 \text{ et } (\lambda_k g_k \mid e_k) > 0 \\ \Leftrightarrow & |\lambda_k|. \| g_k \| = 1 \text{ et } \lambda_k \| g_k \|^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_k = \frac{1}{\| g_k \|} \end{aligned}$$

Finalement $(f_1, \cdots, f_n) = \left(\frac{g_1}{\| g_1 \|}, \cdots, \frac{g_n}{\| g_n \|}\right)$.
Réciproquement, cette famille est orthonormale et vérifie toutes les conditions souhaitées.

§ 25. La famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est appelée *l'orthonormalisée de Gram-Schmidt* de $(e_1, \cdots, e_n)$. L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste à calculer les vecteurs $f_1, \cdots, f_n$ de proche en proche :

1. On pose d'abord $g_1 = e_1$ et $f_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|}$
2. Supposons calculés les vecteurs $g_1, \cdots, g_{k-1}$. Alors on pose

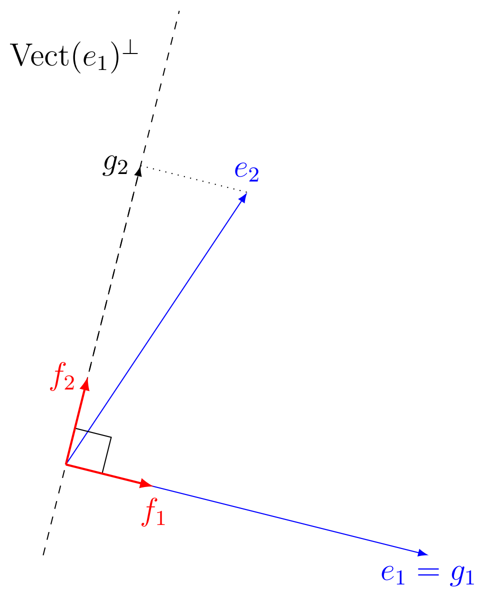
$$g_k = e_k - p_{\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k-1})}(e_k)$$

Ce vecteur, qui est la projection de e_k sur l'orthogonal de $Vect(e_1, \cdots, e_{k-1})$, se calcule facilement :

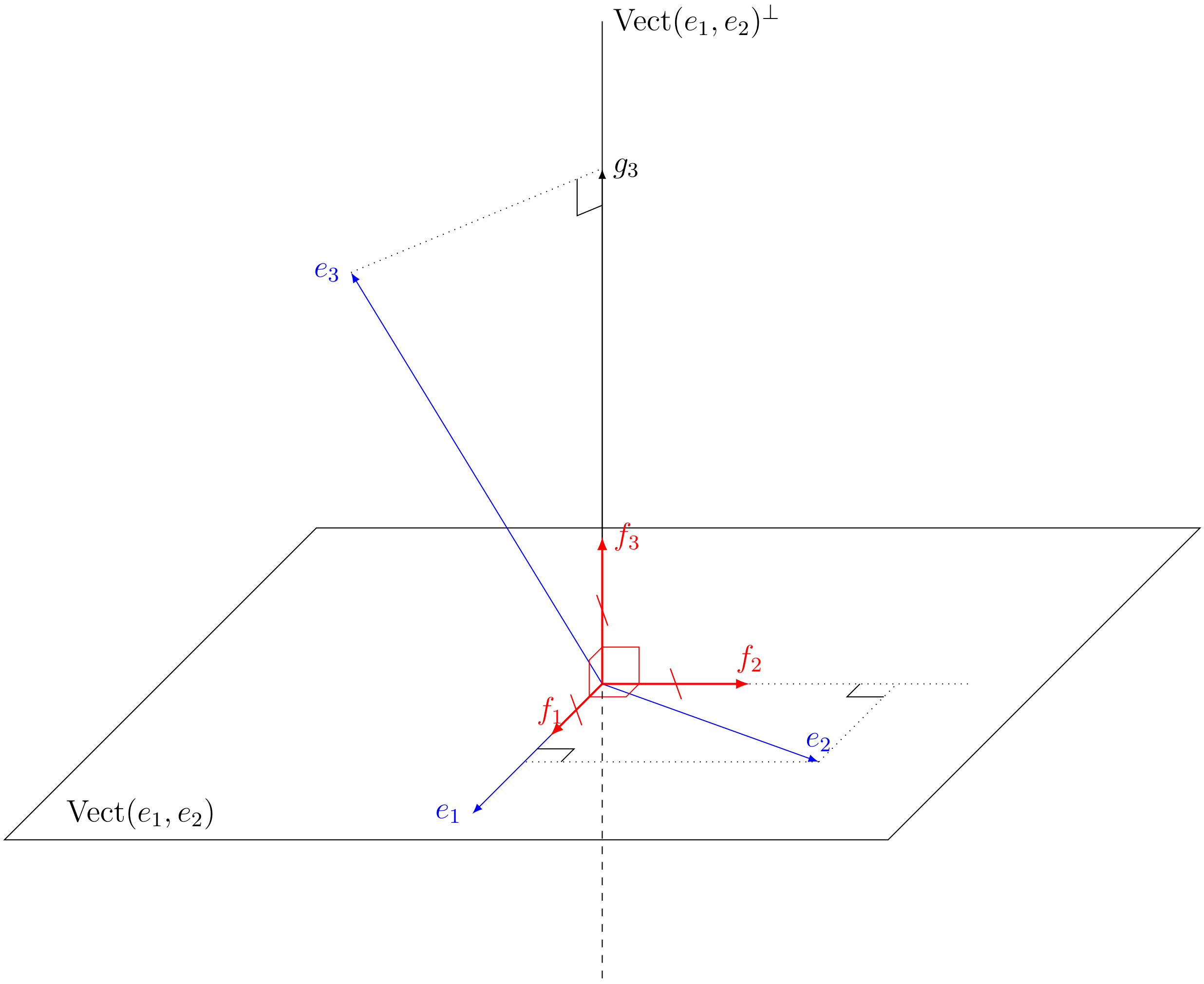
$$g_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k \mid f_i)\, f_i$$

On peut alors poser $f_k = \dfrac{g_k}{\| g_k \|}$.

§ 26. Illustration : algorithme de Gram-Schmidt pour les deux premiers vecteurs : on construit la base orthonormale (f_1, f_2) à partir de deux vecteurs indépendants (e_1, e_2)



§ 27. Illustration : algorithme de Gram-Schmidt avec trois vecteurs :



Remarque. En pratique il n'est pas utile de vérifier que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre : un des vecteurs g_k sera nul si la famille est liée.
Remarque. Si la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthogonale, alors $(g_1, \cdots, g_n) = (e_1, \cdots, e_n)$
Exemple 18. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Calculons l'orthonormalisée de Gram-Schmidt (f_1, f_2, f_3) de la famille (e_1, e_2, e_3) définie par

$$e_1 = (1, 0, 1)\ e_2 = (1, -1, 0)\ e_3 = (1, 2, 1)$$

1) on pose $g_1 = e_1$ d'où $f_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$
2) on pose

$$g_2 = e_2 - p_{Vect(e_1)}(e_2) = e_2 - (e_2 \mid f_1)\, f_1 = \frac{1}{2}(1, -2, -1)$$

d'où $f_2 = \frac{g_2}{\| g_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$
3) on pose

$$\begin{aligned} g_3 = e_3 - p_{Vect(e_1,e_2)}(e_3) &= e_3 - (e_3 \mid f_1)\, f_1 - (e_3 \mid f_2)\, f_2 \\ &= \frac{2}{3}(1, 1, -1) \end{aligned}$$

d'où $f_3 = \frac{g_3}{\| g_3 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$

Exercice 28. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \text{ où } \begin{cases} e_1 = (-1, 1, 1) \\ e_2 = (0, 2, 3) \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormale de F.
réponse :
Soit (f_1, f_2) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (e_1, e_2). Nous avons

$$Vect(f_1, f_2) = Vect(e_1, e_2) = F$$

donc (f_1, f_2) est bien une base orthonormale de F. Calculons maintenant ces vecteurs :
-> D'abord $f_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$
-> Pour obtenir f_2, posons

$$g_2 = e_2 - p_{Vect(e_1)}(e_2) = e_2 - (e_2 \mid f_1)\, f_1 = \frac{1}{3}(5, 1, 4)$$

donc $f_2 = \frac{g_2}{\| g_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(5, 1, 4)$

Exercice 29. Déterminer une base orthonormale de $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

On pourra appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
réponse :
Remarquons d'abord :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(X^i \mid X^j\right) = \int_{-1}^{1} t^{i+j} dt = \begin{cases} \frac{2}{i+j+1} \text{ si } i+j \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Notons maintenant $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3)$ et (f_1, f_2, f_3, f_4) son orthonormalisée de Gram-Schmidt.
-> $f_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
-> e_1 et e_2 sont orthogonaux, donc $f_2 = \frac{e_2}{\| e_2 \|} = \sqrt{\frac{3}{2}}.X$
-> posons

$$\begin{aligned} g_3 = e_3 - p_{Vect(e_1, e_2)}(e_3) &= e_3 - (e_3 \mid f_1)\, f_1 - (e_3 \mid f_2)\, f_2 \\ &= X^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d'où

$$f_3 = \frac{g_3}{\| g_3 \|} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{1}{3})$$

-> Enfin avec

$$\begin{aligned} g_4 = e_4 - p_{Vect(e_1, e_2, e_3)}(e_4) &= e_4 - (e_4 \mid f_1)\, f_1 - (e_4 \mid f_2)\, f_2 - (e_4 \mid f_3)\, f_3 \\ &= X^3 - \frac{3}{5}X \end{aligned}$$

nous obtenons

$$f_4 = \frac{g_4}{\| g_4 \|} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(X^3 - \frac{3}{5}X)$$