1 ($\star$) Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle\, P \mid Q \,\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, où $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels deux à deux distincts.
2. $\langle\, P \mid Q \,\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{P(k)Q(k)}{k!}$ sur $\mathbb{R}[X]$ (montrer d'abord que la série converge)
3. $\langle\, (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) \,\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_3$ sur $\mathbb{R}^3$
4. $\langle\, f \mid g \,\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$
5. $\langle\, f \mid g \,\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$;

RÉPONSE :

1.

2. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit d un entier $> \max(\deg(P), \deg(Q))$, on a
$$\left|\frac{P(k)Q(k)}{k!}\right| = o\left(\frac{k^{2d}}{k!}\right) = o(\frac{1}{k^2})$$
donc la série $\sum \frac{P(k)Q(k)}{k!}$ est absolument convergente.
-linéarité à gauche :
$$\begin{aligned}\langle\, P + \lambda Q \mid R \,\rangle &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(P(k) + \lambda Q(k))R(k)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)R(k)}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q(k)R(k)}{k!} \\ &= \langle\, P \mid R \,\rangle + \lambda \langle\, Q \mid R \,\rangle\end{aligned}$$
-symétrie :
$$\langle\, Q \mid P \,\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q(k)P(k)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)Q(k)}{k!} = \langle\, P \mid Q \,\rangle$$
-positivité :
$$\langle\, P \mid P \,\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)^2}{k!} \geqslant 0 \text{ (somme de réels positifs)}$$
de plus :
$$\begin{aligned}\langle\, P \mid P \,\rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)^2}{k!} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad P(k) = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ (seul le polynôme nul a une infinité de racines)}\end{aligned}$$
Finalement l'application $(P, Q) \mapsto \langle\, P \mid Q \,\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Vérifions les axiomes de positivité et de séparation. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,
$$\langle\, x \mid x \,\rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + (x_2 + x_3)^2 \geqslant 0$$
et de plus :
$$\langle\, x \mid x \,\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_2^2 = 0 \\ x_3^2 = 0 \\ (x_2 + x_3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

4. Vérifions l'axiome de séparation. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle\, f \mid f\,\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 t^2 f(t)^2 dt = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in[0,1] \quad t^2f(t)^2 = 0 \text{ (intégrale nulle d'une fonction continue et positive)}\\ &\Leftrightarrow \forall t \in]0,1] \quad f(t)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in[0,1] \quad f(t) = 0 \text{ (f est continue en 0)}\\ &\Leftrightarrow f=0\end{aligned}$$

5. Vérifions l'axiome de séparation. Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\langle\, f \mid f\,\rangle = 0 &\Leftrightarrow f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0\\ &\Leftrightarrow f(0) = \int_0^1 f'(t)^2dt = 0 \text{ (somme nulle de termes positifs)}\\ &\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ et } \forall t\in[0,1]\ f'(t)^2 = 0 \text{ (intégrale nulle d'une fonction continue et positive)}\\ &\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ et } f \text{ est constante sur } [0,1]\\ &\Leftrightarrow f=0\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ ($\star$) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base (u,v,w) avec : $u=(1,0,1),\ v=(1,1,1),\ w=(-1,-1,0)$

RÉPONSE : Soit (a,b,c) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à (u,v,w).
- D'abord $a = \frac{u}{\| u \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$
- Ensuite $b = \frac{x}{\| x \|}$ où

$$x = v - p_{vect(u)}(v) = v - \langle\, v \mid a\,\rangle a = (1,1,1)-(1,0,1) = (0,1,0)$$

donc $b=(0,1,0)$.
- Enfin $c = \frac{y}{\| y \|}$ où

$$y = w - p_{vect(a,b)}(w) = w - \langle\, w \mid a\,\rangle a - \langle\, w \mid b\,\rangle b = (-1,-1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + (0,1,0) = \frac{1}{2}(-1,0,1)$$

donc $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

$\boxed{3}$ ($\star$) Proposer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle\, P \mid Q\,\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$

RÉPONSE : Appliquons le procédé de Schmidt ; soit (P_1,P_2,P_3) l'orthogonalisée de Schmidt de la base canonique $(1,X,X^2)$:
$P_1 = 1$
$P_2 = X - p_{vect(1)}(X) = X - \frac{\langle\, 1 \mid X\,\rangle}{\| 1 \|^2}.1 = X$
$P_3 = X^2 - p_{vect(1,X)}(X^2) = X^2 - (\frac{\langle\, 1 \mid X^2\,\rangle}{\| 1 \|^2}.1 + \frac{\langle\, X \mid X^2\,\rangle}{\| X \|^2}.X) = X^2 - X$
$(1, X, X^2 - X)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\boxed{4}$ ($\star$) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^* \ \forall (x_1,\cdots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n \quad n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$

RÉPONSE : $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire canonique, posons $x = (\sqrt{x_1},\cdots,\sqrt{x_n}) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $y = (\frac{1}{\sqrt{x_1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{x_n}})$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}&\langle\, x \mid y\,\rangle^2 \leqslant \| x \|^2 \| y \|^2\\ \text{donc } &\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}.\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\\ \text{donc } &n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\end{aligned}$$

5 ($\star$) Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt$$

Pour quelle(s) fonction(s) a-t-on l'égalité ?

Réponse : L'espace $E = C([a,b],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire

$$\forall (f,g)\in E^2 \quad \langle\, f \mid g\,\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Soit $f\in E$ et $g=1$, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} &\langle\, f \mid g\,\rangle^2 \leqslant \|\, f\,\|^2 \,\|\, g\,\|^2 \\ \text{donc } &\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b dt\right) \\ \text{donc } &\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt \end{aligned}$$

6 ($\star$) $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire $\langle\, P \mid Q\,\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Déterminer $A\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle\, 1 \mid A\,\rangle = 1$ et $\langle\, X \mid A\,\rangle = \langle\, X^2 \mid A\,\rangle = 0$
2. Calculer $\|\, A\,\|$
3. Montrer que $\sup\limits_{\|\, P\,\|\leqslant 1} P(0) = 3$

Réponse :

1. Posons $A = aX^2+bX+c$,

$$\begin{cases}\langle\, 1 \mid A\,\rangle = 1\\ \langle\, X \mid A\,\rangle = 0\\ \langle\, X^2 \mid A\,\rangle = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1\\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0\\ \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=30\\ b=-36\\ c=9\end{cases}$$

donc $A = 30X^2-36X+9$

2. $\|\, A\,\|^2 = \langle\, A \mid A\,\rangle = \langle\, A \mid 30X^2-36X+9\,\rangle = 30\langle\, A \mid X^2\,\rangle - 36\langle\, A \mid X\,\rangle + 9\langle\, A \mid 1\,\rangle = 9$ donc $\|\, A\,\| = 3$.
3. Les applications linéaires $P\mapsto P(0)$ et $P\mapsto\langle\, A \mid P\,\rangle$ prennent les mêmes valeurs sur la base canonique $(1,X,X^2)$, donc sont égales sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|\, P\,\|\leqslant 1$. Alors (inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$P(0) = \langle\, A \mid P\,\rangle \leqslant \|\, A\,\|\,\|\, P\,\| \leqslant 3$$

avec égalité lorsque $P = \frac{A}{\|\, A\,\|}$. Donc $\sup\limits_{\|\, P\,\|\leqslant 1} P(0) = 3$

7 ($\star$) Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathcal{B}$: $\begin{cases}x+y+z+t=0\\ x+2y+3z+4t=0\end{cases}$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Calculer $d(e_1,F)$.

Réponse :

1. On commence par chercher une base de F. Soit $a = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E$.

$$a \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = z+2t \\ y = -2z-3t \end{cases}$$

donc $F = Vect(u_1, u_2)$ avec

$$u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, \qquad u_2 = 2e_1 - 3e_2 + e_4$$

Soit (v_1, v_2) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à (u_1, u_2) :
$v_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3)$
$v_2 = \frac{w}{\| w \|}$ où

$$w = u_2 - p_{vect(v_1)}(u_2) = u_2 - \langle u_2 \mid v_1 \rangle v_1 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4)$$

donc $v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4)$.
(v_1, v_2) est une base orthonormale de F.

2.

$$\begin{aligned} d(e_1, F)^2 &= \| e_1 - p_F(e_1) \|^2 \\ &= \| e_1 \|^2 - \| p_F(e_1) \|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &= 1 - \| \langle e_1 \mid v_1 \rangle v_1 + \langle e_1 \mid v_2 \rangle v_2 \|^2 \text{ (expression du projeté orthogonal)} \\ &= 1 - \left(\langle e_1 \mid v_1 \rangle^2 + \langle e_1 \mid v_2 \rangle^2 \right) \text{ (Pythagore)} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{30} \right) \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

donc $d(e_1, F) = \sqrt{\frac{7}{10}}$

$\boxed{8}$ ($\star$) Pour chacun des exemples suivants, donner une base orthonormale de F, de $F^\perp$ et calculer la matrice de la projection orthogonale p_F dans la base canonique :

1. $F = \text{Vect}\{(-1,1,2),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$
2. $F = \{ \ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(1) = P'(0) = 0 \ \}$, $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire $\left\langle \sum_{n=0}^{2} a_n X^n \mid \sum_{n=0}^{2} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{2} a_n b_n$.
3. F est l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre 2. $M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $\langle A \mid B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$

Réponse :

1. Notons $e_1 = (-1,1,2)$, $e_2 = (1,1,1)$ (base de F).

   * BON de F : Soit (f_1, f_2) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt associée à (e_1, e_2). On calcule :
   $f_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$
   $f_2 = \frac{a}{\| a \|}$ où $a = e_2 - p_{e_1}(e_2) = \frac{1}{3}(4,2,1)$, donc $f_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,2,1)$.
   * BON de $F^\perp$: Posons maintenant $b = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$b \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle b \mid e_1 \rangle = 0 \\ \langle b \mid e_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

   donc $F^\perp = Vect((1,-3,2))$. En posant $f_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)$ on obtient une base orthonormale de $F^\perp$

$*$ Matrice de p_F dans la base canonique $B = (i, j, k)$: on calcule

$$p_F(i) = \langle\, i \mid f_1 \,\rangle f_1 + \langle\, i \mid f_2 \,\rangle f_2 = \frac{1}{14}(13, 3, -2)$$
$$p_F(j) = \langle\, j \mid f_1 \,\rangle f_1 + \langle\, j \mid f_2 \,\rangle f_2 = \frac{1}{14}(3, 5, 6)$$
$$p_F(k) = \langle\, k \mid f_1 \,\rangle f_1 + \langle\, k \mid f_2 \,\rangle f_2 = \frac{1}{14}(-2, 6, 10)$$

donc $M_B(p_F) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

2. Une base orthonormale de F est $(f_1) = (\frac{X^2-1}{\sqrt{2}})$. Une base orthonormale de $F^\perp$ est $(f_2, f_3) = (X, \frac{X^2+1}{\sqrt{2}})$. On calcule ensuite :

$$p_F(1) = \langle\, 1 \mid f_1 \,\rangle f_1 = \frac{1}{2}(1 - X^2)$$
$$p_F(X) = \langle\, X \mid f_1 \,\rangle f_1 = 0$$
$$p_F(X^2) = \langle\, X^2 \mid f_1 \,\rangle f_1 = \frac{1}{2}(X^2 - 1)$$

donc $M_{\text{base canonique}}(p_F) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. base orthonormale de F : $(f_1, f_2, f_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

base orthonormale de $F^\perp$: $f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

base canonique de $M_2(\mathbb{R})$: $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ (matrices élémentaires)

projections :

$$p_F(E_{11}) = E_{11},\ p_F(E_{22}) = E_{22},\ p_F(E_{12}) = p_F(E_{21}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M_B(p_F) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ ($\star\star$) Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de matrice $M_B(f) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection orthogonale sur un sous-espace F dont on donnera une base.

Réponse : Notons $A = M_B(f)$. On voit facilement que $A^2 = A$ donc f est un projecteur de E, sur $F = \mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(f)$. Nous allons déterminer des bases de F et G et montrer que $G = F^\perp$. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A

- base de F : la matrice A est de rang au moins 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes) et $\mathrm{rg}(A) < 3$ (sans quoi on aurait $f = \mathrm{Id}_E$) donc (C_1, C_2) est une base de $\mathrm{Im}(A)$ et donc une base de F est

$$(u_1, u_2) = (5e_1 - 2e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3$$

-base de G : d'après le théorème du rang $\dim(G) = 1$. De plus on observe la relation $C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$ et donc $u_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$ constitue une base de G.

-orthogonalité : la base (e_1, e_2, e_3) est orthonormale donc

$$\langle\, u_1 \mid u_3 \,\rangle = \langle\, 5e_1 - 2e_2 + e_3 \mid e_1 + 2e_2 - e_3 \,\rangle = 5 \times 1 - 2 \times 2 - 1 \times 1 = 0$$

et de même $\langle\, u_2 \mid u_3 \,\rangle = 0$

donc $G \subset F^\perp$, puis $G = F^\perp$ pour des raisons de dimension.

10 ($\star\star$) Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 .$$

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

RÉPONSE : D'abord pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\| e_j \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2 = \| e_j \|^2 + \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i \rangle^2$$

donc pour tout $i \neq j$, $\langle e_i \mid e_j \rangle = 0$. De plus avec $x = \frac{e_j}{\| e_j \|}$,

$$1 = \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{e_j}{\| e_j \|}, e_i \right\rangle^2 = \| e_j \|^2$$

donc $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale.
Montrons que c'est une base. Soit $F = Vect(e_1, \cdots, e_n)$, $x \in E$ et $y = x - p_F(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$:

$$\| y \|^2 = \| x \|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i \right\|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 = 0$$

donc $y = 0$, donc $x \in F$. Finalement $F = E$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale.

11 ($\star\star$) Soit E préhilbertien. Montrer qu'un projecteur p de E est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \| p(x) \| \leq \| x \|$

RÉPONSE : Soit p un projecteur de E tel que

$$\star : \quad \forall x \in E, \| p(x) \| \leq \| x \|$$

Notons $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$, et montrons que les sous-espaces F et G sont orthogonaux.
Soit $(x, y) \in F \times G$ ($y \neq 0$) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Appliquons $\star$ au vecteur $x + \lambda y$:

$$\begin{aligned} & \| p(x + \lambda y) \| \leq \| x + \lambda y \| \\ \text{donc } & \| x \| \leqslant \| x + \lambda y \| \\ \text{donc } & \| x \|^2 \leqslant \| x + \lambda y \|^2 \\ \text{donc } & \| x \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle + \lambda^2 \| y \|^2 \\ \text{donc } & 0 \leqslant \lambda(2 \langle x \mid y \rangle + \lambda \| y \|^2) \end{aligned}$$

La fonction polynôme du second degré $\lambda \mapsto \lambda(2 \langle x \mid y \rangle + \lambda \| y \|^2)$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc a au plus une racine réelle, donc $0 = -\frac{2\langle x \mid y \rangle}{\| y \|^2}$ donc $\langle x \mid y \rangle = 0$. Par conséquent F et G sont orthogonaux et supplémentaires, donc $G = F^\perp$ et p est le projecteur orthogonal sur F.

12 ($\star\star$) Soient E espace vectoriel euclidien, $a \in E$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation

$$\alpha \langle x \mid x \rangle + \beta \langle x \mid a \rangle + \gamma = 0$$

RÉPONSE : Notons (E) l'équation étudiée et S l'ensemble de ses solutions. -Si $\alpha = 0$ et ($\beta = 0$ ou ($\beta \neq 0$ et $a = 0$) : $(E) \Leftrightarrow \gamma = 0$. $S = \varnothing$ si $\gamma \neq 0$, $S = E$ sinon.
-Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ et $a \neq 0$: Puisque $a \neq 0$, la forme linéaire $x \mapsto \langle a \mid x \rangle$ est surjective donc il existe $b \in E$ tel que $\langle a \mid b \rangle = -\frac{\gamma}{\beta}$. Donc

$$(E) \Leftrightarrow \langle x \mid a \rangle = -\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \langle x - b \mid a \rangle = 0 \Leftrightarrow x - b \in Vect(a)^\perp$$

donc $S = b + Vect(a)^\perp$.
- Si $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \| x \|^2 + \frac{\beta}{\alpha}\langle x \mid a \rangle + \frac{\gamma}{\alpha} = 0\\ &\Leftrightarrow \left\| x + \frac{\beta}{2\alpha}a \right\|^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\| a \|^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0\\ &\Leftrightarrow \left\| x + \frac{\beta}{2\alpha}a \right\|^2 = \frac{\beta^2 \| a \|^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\end{aligned}$$

nous avons donc les cas suivants :
-> Si $\beta^2 \| a \|^2 - 4\alpha\gamma < 0$: $S = \varnothing$
-> Si $\beta^2 \| a \|^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0$: S est la sphère de centre $-\frac{\beta}{2\alpha}a$ et de rayon $\frac{\sqrt{\beta^2\| a \|^2-4\alpha\gamma}}{2|\alpha|}$

$\boxed{13}$ ($\star\star$) Soit A la matrice d'un endomorphisme f d'un espace euclidien E dans une base orthonormale B. Montrer que f est un projecteur orthogonal si et seulement si $A^2 = A$ et $A^T = A$.

$\boxed{14}$ ($\star\star$) Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0$

$\boxed{15}$ ($\star\star$) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P \mid Q) = \sum_i a_i b_i$.
Soit $H = \{P \in E \text{ tq } P(1) = 0\}$.

1. Trouver une base orthonormale de H.
2. Calculer $d(X, H)$.

$\boxed{16}$ ($\star\star$) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

1. Montrer que : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$
2. Montrer que ce sont des égalité lorsque E est de dimension finie.

Réponse :

1. Inclusions $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ vues en cours.
   Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et soit $z \in F + G$. Posons $z = a + b$ avec $(a, b) \in F \times G$. On a donc
   $$\langle x \mid z \rangle = \langle x \mid a \rangle + \langle x \mid b \rangle = 0 + 0 = 0$$
   donc $x \in (F+G)^\perp$. Donc $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. Supposons $\dim(E) < +\infty$. Nous avons d'abord (question 1) :
   $$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$$
   Or pour tout sous-espace H de E, $(H^\perp)^\perp = H$, donc
   $$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$$
   et
   $$(F \cap G)^\perp = ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

$\boxed{17}$ ($\star\star$) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Soit $f : P \mapsto P'(1)$. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \langle A \mid P \rangle = f(P)$

Réponse : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel polynôme $A = a_0 + \cdots + a_N X^N$ existe. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(X^n) = \langle X^n \mid A \rangle$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad n = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{n+k+1}$$

Notons $M = max_k|a_k|$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{M}{n+1} = \frac{M(N+1)}{n+1}$$

et quand $n \to +\infty$:$+\infty \leqslant 0$: contradiction.

$\boxed{\mathbf{18}}$ ($\star\star$) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle\ P \ \mid\ Q\ \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$
2. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$

RÉPONSE :

1. $(P_1, P_2) = (1, \sqrt{3}(2X-1))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$
2. Le nombre à calculer est $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$:

$$\begin{aligned}
d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 &= \|\ X^2 - p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\ \|^2 \\
&= \|\ X^2 - \langle\ X^2 \mid P_1\ \rangle P_1 - \langle\ X^2 \mid P_2\ \rangle P_2\ \|^2 \\
&= \|\ X^2\ \|^2 - \langle\ X^2 \mid P_1\ \rangle^2 - \langle\ X^2 \mid P_2\ \rangle^2 \text{ (Pythagore)} \\
&= \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{6})^2 \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{19}}$ ($\star\star\star$) Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application vérifiant $f(0) = 0$ et qui conserve les distances : $\forall (x,y) \in E^2, \|\ f(x) - f(y)\ \| = \|\ x - y\ \|$ (on ne suppose pas f linéaire)

1. Montrer que f conserve le produit scalaire :$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle\ f(x) \mid f(y)\ \rangle = \langle\ x \mid y\ \rangle$.
2. Que dire de l'image par f d'une base orthonormale de E ?
3. Montrer que f est linéaire

$\boxed{\mathbf{20}}$ ($\star\star\star$) Soit A une matrice carrée réelle, montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(AA^T)$

$\boxed{\mathbf{21}}$ ($\star\star\star$) On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(a_n)_n$ de réels telles que la série $\sum\limits_n a_n^2$ converge.

1. Donner un exemple de suite positive $(a_n)_n$ qui appartient à ℓ^2 mais telle que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ dans ℓ^2, montrer que la série $\sum_n a_n b_n$ est absolument convergente. Sa somme est notée $\langle\ (a_n) \mid (b_n)\ \rangle$.
3. Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\langle\ .\ \mid\ .\ \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2.
5. Soit F l'ensemble des suites réelles à support fini (ie des suites $(a_n)_n$ telles que $\exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geq k\ a_n = 0$). Montrer que F est un sous-espace vectoriel strict de ℓ^2.
6. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on note $e_k = (\delta_{k,n})_n$. Montrer que $(e_k)_k$ est une base orthonormale de F. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
7. Soit $(a_n) \in \ell^2$. Montrer que la série $\sum\limits_{n>0} \dfrac{a_n}{n}$ converge et que

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}$$

Réponse :

1. $(\frac{1}{n+1}) \in \ell^2$ mais $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
2. Pour tout n, $|a_n b_n \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$. Or $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent, donc $\sum |a_n b_n|$ converge.
3. $\ell^2 \neq \varnothing$. De plus si $(a_n), (b_n) \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout n,
$$(a_n + \lambda b_n)^2 = a_n^2 + \lambda a_n b_n + b_n^2 \leqslant a_n^2 + |\lambda||a_n b_n| + b_n^2$$
Or $\sum a_n^2$, $\sum |a_n b_n|$ et $\sum b_n^2$ convergent, donc $\sum (a_n + \lambda b_n)^2$ converge, ie $(a_n + \lambda b_n) \in \ell^2$
4. $(\frac{1}{n+1}) \in \ell^2 \setminus F$ donc F est un sous-espace strict de ℓ^2.
5. Pour tous i, j,
$$\langle\, e_i \mid e_j \,\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{i,n}\delta_{j,n} = \delta_{i,j}$$
donc $(e_k)_k$ est une famille orthonormale. $Vect(e_k)_k = F$ donc (e_k) est une base de F.
Soit $u = (u_n) \in F^\perp$. On a donc $\langle\, u \mid e_k \,\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ie $u_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $u = 0$.
Donc $F^\perp = \{0\}$. On en déduit $(F^\perp)^\perp = \ell^2 \neq F$
6. Soit $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{n} \text{ sinon} \end{cases}$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\begin{aligned} & |\langle\, a \mid b \,\rangle| \leqslant \|\, a \,\|\, \|\, b \,\| \\ \text{donc } & |\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}| \leqslant \|\, a \,\| \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \\ \text{donc } & |\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2} \end{aligned}$$

$\boxed{22}$ $(\star\star\star)$ $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle\, P \mid Q \,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$

1. Proposer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe un unique $P_a \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(a) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)P_a(t)\,dt$.
Expliciter P_a
3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$. Montrer que $\displaystyle\sup_{a\in[-1,1]} |P(a)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Réponse :

1. En appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ on trouve la base orthonormale :
$$(Q_1, Q_2, Q_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}.X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{1}{3})\right)$$
2. L'application $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$, donc il existe bien un unique $P_a \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \langle\, P_a \mid P \,\rangle = P(a)$.
La base $(Q_1, \cdots, Q_3)$ est orthonormale donc
$$\begin{aligned} P_a &= \langle\, P_a \mid Q_1 \,\rangle Q_1 + \langle\, P_a \mid Q_2 \,\rangle Q_2 + \langle\, P_a \mid Q_3 \,\rangle Q_3 \\ &= Q_1(a)Q_1 + Q_2(a)Q_2 + Q_3(a)Q_3 \end{aligned}$$

3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout P tel que $\| P \| = 1$ et pour tout $a \in [-1,1]$

$$|P(a)| = |\langle P_a \mid P \rangle| \leqslant \| P_a \| \| P \| = \| P_a \|$$

donc

$$\sup_{-1\leqslant a\leqslant 1} |P(a)| \leqslant \sup_{a\in[-1,1]} \| P_a \|$$

Soit $a \in [-1,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}\| P_a \|^2 &= \| Q_1(a)Q_1 + Q_2(a)Q_2 + Q_3(a)Q_3 \|^2 \\ &= Q_1(a)^2 + Q_2(a)^2 + Q_3(a)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a^2 + \frac{45}{8}(a^2 - \frac{1}{3})^2 \\ &= \varphi(a^2)\end{aligned}$$

où $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t + \frac{45}{8}(t - \frac{1}{3})^2$ est décroissante sur $[0, \frac{1}{5}]$ et croissante sur $[\frac{1}{5}, 1]$ donc $\max_{[0,1]} \phi = \max(\varphi(0), \varphi(1)) = \frac{9}{2}$, donc

$$\forall a \in [-1,1], \quad \| P_a \|^2 \leqslant \frac{9}{2}$$

finalement $\sup_{-1\leqslant a\leqslant 1} |P(a)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$

23 $(\star\star\star)$

1. Montrer que $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)\, g(\cos\theta)\, d\theta$ définit un produit scalaire sur $E = C([-1,1], \mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (polynômes de Tchebychev) vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

On pourra commencer par déterminer les 3 premiers termes puis exploiter les formules trigonométriques développant $\cos((n+1)\theta)$ et $\cos((n-1)\theta)$ ... Expliciter T_n pour $n \leqslant 3$. Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

3. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et calculer $\|T_n\|$.

4. En déduire

$$\inf_{(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^\pi \left(\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \ldots + a_1\cos\theta + a_0\right)^2 d\theta$$

Réponse :

1. Vérifions l'axiome de séparation. Pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned}\langle f \mid f \rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(\cos\theta)^2\, d\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\theta \in [0,\pi] \quad f(\cos\theta) = 0 \text{ (intégrale nulle d'une fonction continue et positive)} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [-1,1] \quad f(t) = 0 \quad (\cos([0,\pi]) = [-1,1]) \\ &\Leftrightarrow f = 0\end{aligned}$$

2. Unicité : deux polynômes qui conviennent prennent la même valeur sur l'ensemble infini $[-1,1]$, donc sont égaux.
Existence : par récurrence double sur n. D'abord $T_0 = 1$, $T_1 = X$. Ensuite supposons T_{n-1} et T_n connus $(n \geqslant 1)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(n-1)\theta &= \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta \\ \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta\end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités :

$$\begin{aligned} & \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta \\ \text{donc } & \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \\ \text{donc } & \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = T_{n+1}(\cos\theta) \end{aligned}$$

où $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, ce qui termine la récurrence.
On calcule : $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$
Par récurrence double on montre facilement que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(T_n) = n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$$

3. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, calculons

$$\begin{aligned} \langle T_n \mid T_p \rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos n\theta \cos p\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(n\theta+p\theta) + \cos(n\theta - p\theta))d\theta \end{aligned}$$

Si $n = p = 0$: $\langle T_0 \mid T_1 \rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi$
Si $n = p > 0$: $\langle T_n \mid T_n \rangle = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(2n\theta)+1)d\theta = \frac{1}{2}([\frac{\sin(2n\theta)}{2n}]_0^\pi + \pi) = \frac{\pi}{2}$
Si $n \neq p$: $\langle T_n \mid T_p \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)\theta}{n+p} + \frac{\sin(n-p)\theta}{n-p}\right]_0^\pi = 0$ La famille (T_n) est bien orthogonale, avec

$$\| T_0 \| = \sqrt{\pi} \text{ et } \forall n > 0 \quad \| T_n \| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4. Le nombre cherché est $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2$. Considérons $R_{n-1}[X]$ comme un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$; d'après la question précédente T_n est un vecteur normal de $R_{n-1}[X]$ donc

$$d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \frac{|\langle X^n \mid T_n \rangle|}{\| T_n \|}$$

Comme la famille $(T_0, \cdots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{\langle X^n \mid T_k \rangle}{\| T_k \|^2} T_k$$

regardons le coefficient de X^n dans cette relation, nous obtenons

$$1 = \frac{\langle X^n \mid T_n \rangle}{\| T_n \|^2}.dom(T_n) = \frac{\langle X^n \mid T_n \rangle}{\| T_n \|^2}.2^{n-1}$$

donc

$$d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \frac{|\langle X^n \mid T_n \rangle|}{\| T_n \|} = \frac{\| T_n \|}{2^{n-1}} = 2^{1-n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

24 ($\star\star\star$) Soient $a < b$ des réels et soit $w \in C([a,b], \mathbb{R})$ une fonction strictement positive sur $]a,b[$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormale obtenue à partir de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé de Schmidt.

1. Montrer que pour tout n, $\deg(P_n) = n$ et $\langle P_n \mid X^n \rangle > 0$.
2. On veut montrer que P_n a n racines deux à deux distinctes dans $]a,b[$. Pour cela on procède par l'absurde en supposant que P_n s'annule en changeant de signe en p points $a < t_1 < \cdots < t_p < b$ avec $p < n$.
   (a) Que dire du signe de $t \mapsto P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p)$ sur $]a,b[$?
   (b) Justifier l'égalité $\displaystyle\int_a^b P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p)w(t)dt = 0$

(c) Conclure.

3. Dans cette question on étudie le cas particulier $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = 1$. Pour tout entier n on note $L_n = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ (polynômes de Legendre).
   (a) Calculer P_n et L_n pour $n \leqslant 2$
   (b) Quel est le degré de L_n ? son coefficient dominant ?
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant des intégrations par parties, montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \langle\ L_n \mid P\ \rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n P^{(n)}(t)dt$$
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $P_n = \lambda_n L_n$.
   (e) Calculer $\langle\ L_n \mid X^n\ \rangle$, $\|\ L_n\ \|^2$ et λ_n.

RÉPONSE :

1. Par définition du procédé de Schmidt,
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Vect(1, \cdots, X^n) = Vect(P_0, \cdots, P_n) \text{ et } \langle\ X^n \mid P_n\ \rangle > 0$$
   On end déduit facilement $\deg(P_n) = n$ par récurrence.

2. (a) Écrivons $P_n = \lambda(X-t_1)\cdots(X-t_p).Q$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et Q est unitaire sans racine dans $]a, b[$. Alors pour tout $t \in]a, b[$,
$$P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p) = \lambda(t-t_1)^2\cdots(t-t_p)^2.Q(t)$$
   est de signe constant (du signe de λ) sur $]a, b[$.
   (b) $R = (X-t_1)\cdots(X-t_p) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or P_n est orthogonal au sous -espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\langle\ P_n \mid R\ \rangle = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p)w(t)dt = 0$.
   (c) La fonction $t \mapsto P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p)w(t)$ est continue, de signe constant sur $]a, b[$ et d'intégrale nulle. Donc
$$\forall t \in]a, b[\quad P_n(t)(t-t_1)\cdots(t-t_p)w(t) = 0$$
   on en déduit $P_n = 0$: absurde. Donc P_n a bien n racines deux à deux distinctes dans $]a, b[$.

3. Notons $A_n = (X^2-1)^n$
   (a) On applique le procédé de Schmidt pour obtenir :
$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}.X, \quad P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{1}{3})$$
   Par calcul directe on trouve
$$L_0 = 1, \quad L_1 = X, \quad L_2 = \frac{3}{2}(X^2 - \frac{1}{3})$$
   (b) $\deg(L_n) = \deg(A_n) - n = 2n - n = n$ et
$$dom(L_n) = \frac{1}{2^n n!}.(2n)(2n-1)\cdots(n+1)dom(A_n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, calculons avec n intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\langle\, L_n \mid P\, \rangle &= \int_{-1}^{1} L_n(t)P(t)dt\\
&= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} A_n^{(n)}(t)P(t)dt\\
&= \frac{1}{2^n n!}\left([A_n^{n-1}(t)P(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} A_n^{(n-1)}(t)P'(t)\right)\\
&= \frac{1}{2^n n!}\left([A_n^{(n-1)}(t)P(t) - A_n^{(n-2)}(t)P'(t)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} A_n^{(n-2)}(t)P''(t)\right)\\
&= \cdots\\
&= \frac{1}{2^n n!}\left([\sum_{j=1}^{n} A_n^{(n-j)}(t)P^{(j)}(t)]_{-1}^{1} + (-1)^n\int_{-1}^{1} A_n(t)P^{(n)}(t)\right)
\end{aligned}$$

Or 1 et -1 sont racines de $A_n = (X-1)^n(X+1)^n$ d'ordre n, donc

$$\forall k \leqslant n-1 \quad A_n^{(k)}(1) = A_n^{(k)}(-1) = 0$$

et

$$\langle\, L_n \mid P\, \rangle = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} A_n(t)P^{(n)}(t) = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n P^{(n)}(t)dt$$

(d) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n)} = 0$ donc $\langle\, L_n \mid P\, \rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n P^{(n)}(t)dt = 0$. Donc L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En particulier L_n est orthogonal à $P_0, \cdots, P_{n-1}$ et donc :

$$L_n = \sum_{k=0}^{n}\langle\, L_n \mid P_k\, \rangle P_k = \langle\, L_n \mid P_n\, \rangle P_n$$

De plus $L_n \neq 0$ donc $\langle\, L_n \mid P_n\, \rangle \neq 0$, il suffit donc de poser $\lambda_n = \frac{1}{\langle\, L_n \mid P_n\, \rangle}$

(e) D'après Q3c,

$$\langle\, L_n \mid X^n\, \rangle = \frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$$

Posons $u_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$. On a $u_0 = 2$. En intégrant par parties on obtient :

$$u_n = \int_{-1}^{1} 1.(1-t^2)^n dt = [t(1-t^2)^n]_{-1}^{1} + 2n\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^{n-1}dt = 2n(u_{n-1} - u_n)$$

donc $u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1}$. Par une récurrence immédiate :

$$u_n = \frac{(2n)\cdots 4.2}{(2n+1).\cdots .5.3}.u_0 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

donc

$$\langle\, L_n \mid X^n\, \rangle = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Soit $\alpha = dom(L_n)$, le polynôme $X^n - \frac{L_n}{\alpha}$ est de degré $< n$, donc est orthogonal à L_n, donc $\left\langle\, X^n - \frac{L_n}{\alpha} \mid L_n\, \right\rangle = 0$, donc

$$\|\, L_n\, \|^2 = \alpha\langle\, X^n \mid L_n\, \rangle = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

Calculons λ_n. D'abord $\langle\, P_n \mid X^n\, \rangle > 0$, donc $\langle\, \lambda_n L_n \mid X^n\, \rangle > 0$. Or $\langle\, L_n \mid X^n\, \rangle > 0$, donc $\lambda_n > 0$. De plus $1 = \|\, P_n\, \| = \|\, \lambda_n L_n\, \| = |\lambda_n|\,\|\, L_n\, \|$, donc

$$\lambda_n = \frac{1}{\|\, L_n\, \|} = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$